中国人的智慧丛书

探索数形奥秘

王薇东　于启斋　王居仕　编著

大象出版社





近代世界赖以建立的种种基本发明和发现可能有一半以上源于中国

——李约瑟

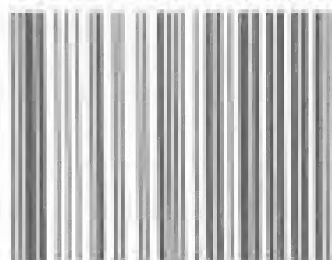
中国人的智慧丛书

探索数形奥秘

中国人的智慧丛书

- 探索数形奥秘
- 洞察物质运动
- 营造有形世界
- 撞击生命之门
- 揭示物质变化
- 窥究天地之秘
- 播撒绿色希望
- 寻求健康之路





ISBN 7-5347-2511-9/G · 2036
定价：6.80元

中国人的智慧丛书

探索数形奥秘

王敬东　于启斋　王居仕　编著

明天出版社

图书在版编目(CIP)数据

探索数形奥秘/王敬东等编著.—郑州:大象出版社,
2000.9
(中国人的智慧丛书)
ISBN 7-5347-2511-9

Ⅰ.探… Ⅱ.王… Ⅲ.数学史-中国-普及读物
Ⅳ.O119-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 38837 号

责任编辑 刘东蓬
责任校对 范秀娟
封面设计 朱 晖
出 版 大象出版社(郑州市农业路73号 邮政编码450002)
发 行 大象出版社发行部 电话:0371—5726194
印 刷 河南第一新华印刷厂
版 次 2000年9月第1版 2000年9月第1次印刷
开 本 850×1168毫米 1/32
印 张 5.375
字 数 125千字
印 数 1—1 000册
定 价 6.80元

目　录

最妙的发明

现在，拿出两个数字 8 和 1，就是小学一年级的学生，也可以毫不费力地组成 18 和 81 两个数。同时，谁都清楚地知道，8 在个位上是 8，而在十位上则是 80。然而，在世界数学史上，是我国劳动人民首先采用这种十进位值制方法计数的；而当时其他国家的记数，却远没有达到如此先进的程度。比较一下，你就明白了。

在古埃及，81 这个数，必须写成八个 10，再写一个 1，才能组成 81。这样，在读出 81 以前，必须做个加法题，即 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 = 81。

玛雅人使用的是 20 进制，81 必须写"∵∵"，上面的每个点表示 20，下面那个点是 1，即是 20 + 20 + 20 + 20 + 1 = 81。

欧洲人使用罗马数字，数字很多，L 代表 50，X 代表 10，I 代表 1，那 81 就必须写作LXXXI，即是 50 + 10 + 10 + 10 + 1 = 81。

以上 3 种记数法，带有刻木记事和结绳记事的痕迹。远古时，原始人有的采用结绳记数。一条长绳上有许多结，大结可代表 10，小结可代表 1，事物的总数为绳结之和。如果要记的是一个上万的大数，结和数都很麻烦，往往令人望而却步。

这"难"字的症结何在呢？说穿了也很简单：难就难在没有采用位值制。

直到 16 世纪，有些欧洲国家还在使用这种笨拙的记数法。当时，一般欧洲人不会加减法，而少数精通四则运算的人就可以称作数学家了。如果要计算 235 × 4，现在看来是非常简单的问题，但在那时，计算却相当复杂，下面就是他们的计算过程：

235(CCXXXV)乘上4(IV)

第一步是将CC、XXX、V分别重复写4遍：

CC	CC	CC	CC
XXX	XXX	XXX	XXX
V	V	V	V

第一行共有8个C,将5个C缩写成一个D(500)。

第二行10个X缩写成一个C(100),第三行缩写成XX(20),于是简写成：

DCCC

CXX

XX

再进一步合并,才能得到结果DCCCCXL(XL是40)。

由上不难看出,乘以一位数就这么冗(rǒng)长,如果是多位数乘以多位数,其复杂程度就更难以想像了!

欧洲人的这种"堆砌"记数法,确实相当繁琐。如果采用我们祖先的"位值制",问题则会变得十分简单明了。

据甲骨文记载,早在3400多年前的殷商时代,我国就有了完整的十进位值制记数法。

我们在那里不仅可以找到相对应于1—9的九个基本字符,而且还能找到十、百、千、万等表示位值的字。而且,其后汉文中的数字,竟与它们是一脉相承的。

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 100 1000 10000

甲骨文数字

与十进位值制记数法紧密相关的,就是算筹和筹算的发明。

算筹是用于记数和计算的工具，筹算就是用算筹进行数学运算的方法。例如，1954 年，在湖南长沙的一座战国晚期的楚墓中，发现了 40 根长短一致的小竹棒，长约 12 厘米，它们就是现存最早的算筹实物。用算筹按一定规则排列起来表示数字，称为筹式。筹式有纵式和横式两种表示形式：

纵式：	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式：	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

如果用算筹表示 6451，那么就应写作：𝍮𝍣𝍭𝍠

这种记数法，个位用纵式，十位用横式，其余相间，遇到零，用空格表示。这样，只用 9 个数码加上一个空格，就能表示任意的自然数，并可进行运算。

显而易见，我国古代的这种十进位值制记数法，除了记数符号不同外，其他都与现在通用的记数法相同。

这种位值制，在我国公元前 4 世纪的《墨经》一书中，就说得很清楚："一少于二而多于五。说在建位。"意即 1 这个数，在个位上就比 2 少，换到十位上就比 5 多。每个数字的大小，除了本身的数值，还要看它在整个数中所处的位置。

毋庸赘（zhuì）言，中国古代的十进位值制在世界上是一大发明，对数学的发展具有划时代的意义。

应该承认，十进位值制记数法和以它为基础的筹算系统，使中国古代数学遥遥领先于世界其他文明古国，如古巴比伦、古埃及和古希腊。印度直到 6 世纪，仍然用特殊的符号表示 20、30、40 等 10 的倍数，到了 7 世纪才采用十进位值制记数法，比中国晚了 1000 多年，欧洲人正式采用十进位值制记数法的最早证据，则是公元 976 年的一份西班牙文抄本。

马克思在《数学手稿》一书中，曾赞誉它为“最妙的发明”。

长期从事中国科技史研究的英国科学家李约瑟也曾感叹说：“奇怪的是，忠实于表意原则而不使用字母的文化，反而发展了现代人类普遍使用的十进位值制的最早形式。如果没有这种十进位值制，就几乎不可能出现我们现在这个统一化的世界了。”

“0”的故乡在中国

“0”是一个十分美妙的数字，它的作用无比奇妙，不可思议。它独立存在时，介于正数和负数之间；它表示一个数，但这个数却什么也没有，然而，若没有它，却又无法表示所有的数。就是这样一个现在看来如此简单的“0”，在我国古代数学史的长河中，却经历了一个十分曲折而又漫长的发展过程。不信请看……

“0”在我国的诞生和完善，大约经历了五个阶段：

一、用空位表示

二、用“空”字代替

三、用方框“□”代替

四、用圆圈“○”表示

五、用椭圆“0”表示

如果沿着历史的长河逆流而上，那么，就不难发现，在我国春秋战国时期，人们就开始使用零的表示法了。当时人们是采用在算筹间留下空位的方式来表示，这从我国敦煌石窟的唐代手抄本《立成算经》中，就可以找到证明。当时，把405表示为“|||| |||||”，又把90写成“𝍱 ”，120写成“|＝ ”。

后来，可能考虑到这个空格会使人产生误解，所以又采用了“空”字来表示零。如把405就写成了“||||空|||||”。这样，就表示出了一个实实在在的数学概念，有几个“空”字就表示几个零和几位数字，这的确是一大进步。

应该承认，“空”的运用，是用文字符号表示零的开始，这不仅是意义上的表示，而且也是实际形象的表示。

不过，仍有美中不足之处。那就是这个"空"在数学运算过程中，既不怎么方便，又显得和纵横相间的筹算数字不协调、不统一。于是，人们便又采用正方形"口"来表示零。

例如，南宋蔡沈著《律吕新书》中，就把118098，记作"十一万八千口九十八"。这标志着用文字表示零转变为用符号表示零的新阶段。而且，它直接导致了我国数学史上基本完善的零符号——圆圈"○"的诞生。

圆圈"○"是我国古代数学家所独创的。最早见于秦九韶的《数学九章》(1247年)。如把3076800记作：𝍢○𝍦𝍮𝍧○○。

筹算中以○代零

为什么用"○"零代替"口"零呢？它可能是受了太阳、月亮、圆圆的珍珠等的启发后，才把数学的逻辑和艺术的形象美结合了起来。另外一个事实是，"○"零比起"口"零书写起来也容易得多。

圆圈"○"与现代数学中的椭圆"0"是不同的。"0"在我国的最早出现，与阿拉伯数码在我国出现是同时的。最早记录见于明末方以智(1611—1671)的《通雅》(1641年)一书中："太西字，十字皆只一画，作1234567890，不烦两笔，亦取其简便尔。"

那么，从"○"到"0"的演变又是怎样的呢？

根据现有资料研究，椭圆"0"是公元4世纪左右(东晋)产生于中印边界一带，那时，它还不代表零。中国的"○"传到印度后，印度的碑文上就出现了用"0"表示零的情况。为什么就演变成

“0”呢？这恐怕要用美学观点来解释了。因为1—9都是长条形状，“○”也就自然地变成了苗条的“0”了。

零是数学史上的一大发明，其意义非同小可。首先，零代表“无”，没有“无”何来“有”？因此，零是一切数的基础。其次，没有零就没有进位制，没有进位制就难以表示大数，数学就走不了多远。零的特点还表现在其他运算功能上，任何数加减零，其值不变；任何数乘以零，得零；任何非零数除以零，得无限大；零除以零，得任何数。

纵观历史，毫无疑问地应该承认：零的故乡在中国，是中国人最早创造性地在数学中运用了“○”。正如李约瑟的风趣表述：“也许我们可以冒昧地把这个符号看作是汉代筹算盘上摆了一个印度花环。”

当今，世界各国数学史研究学者，都已经达成共识：中国名副其实是“0”的故乡，而印度，充其量可称为“0”的第二国籍。

令人振奋的是，20世纪末，在网络上评选1000年来最重要的发明时，“0”也在被提名之列。

古代几何学

提到几何学，人们想到的总是古希腊数学家欧几里得的《几何原本》。

岂知，我们中国还有一本比《几何原本》早 100 多年的《墨经》呢！

《墨经》的作者是墨翟（dí）。

墨翟（约前 468—前 376）是我国古代春秋战国时期鲁国人。他所生活的年代，是我国从奴隶社会向封建社会大转变的时期。

墨翟一生品格高尚，以古代的大禹为榜样，全心全意地为下层的劳苦大众服务。他一方面从事生产劳动，从劳动中获取经验和知识；另一方面苦心钻研，勤于思考，成了当时社会上享誉极高的学术权威。

墨翟曾利用几何知识，给人们制造能载 50 石（dàn）的车辆和其他生产工具。他做事认真，从不敷衍（fū・yǎn）塞责，很得人们的厚爱，人们称他为墨子。

当时，墨翟与一些志同道合的朋友及学生，组成了以他为代表人物的墨子学派。墨子学派提出了许多学术观点，并用竹简记录下来，这就是墨子学派的代表作——《墨经》。

《墨经》包括《经上》、《经下》、《经说上》、《经说下》等多篇。在《经上》、《经下》中阐述了一些几何定义和命题。

《墨经》虽然没有《几何原本》那么系统完善和严密的论证，但是其中若干的几何理论，却跟《几何原本》中的相关知识完全一致。

这里，不妨从《墨经》中采撷一些定义或命题，以供读者朋友鉴赏。

《经上》中说："平，同高也。"

意思是说：平行线（或平行面）就是两条（个）在每一处距离（高）都相等的直线（平面）。这里的"同高"，就是《几何原本》中的两直线间的距离处处相等。

《经上》中："中，同长也。"

用现代的话说，就是：线段中点到线段两端的距离相等。

《经上》中说："圆，一中，同长也。"

用现代的话说，就是：圆（或球），有一个中心，且圆（或球）上每一点到这个中心的距离相等。

《墨经》共15卷，71篇，今天只保存下53篇。其中几何内容19篇。

如果把《几何原本》与《墨经》对照，不难发现，《几何原本》谈到的，《墨经》中大都涉及到了。因此，可以说，中国古代虽没有产生严格意义上的几何学，但聪明的中国人，却早于欧几里得100多年在这块园地上耕耘和收获了。

特别值得指出的是，《墨经》的主要价值还在于，中国古代的科学家已能够透过直接观测和实验，概括上升为抽象的理论了。这种思想方法恰恰是中国，而且后来也成为西方科学得以迅速发展的强大武器。从这一点上看，《墨经》是一本多么难能可贵的数学著作啊！

勾股定理

勾股定理在西方国家被称为“毕达哥拉斯定理”，也叫“百牛定理”。我们中国人称为“勾股定理”，也叫“商高定理”，或“陈子定理”。现在世界上通称为“勾股定理”。

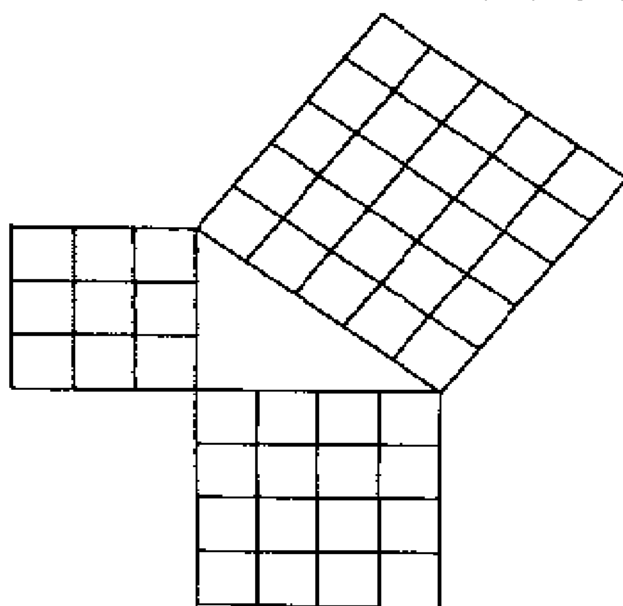
奇怪！这是怎么回事？

原来，毕达哥拉斯是公元前6世纪古希腊的数学家。由于是他发现了这条定理，所以人们就称其为“毕达哥拉斯定理”。

传说，当年他发现这一定理后，欣喜若狂，认为这是缪斯女神（古希腊神话中掌管文艺、科学的女神）的赐予，竟杀了100条牛祭祀（jì · sì）。所以，后人也称此定理为“百牛定理”。

在我们中国，《周髀（bì）算经 · 卷上 · 周公问算》中却有这样的记载：

周公（周武王之弟）向商高请教数学上的问题时说：古时伏羲是如何测量天文和制定历法的，天既没有供攀登的台阶，地也不能用尺子去测量，那么，这些数是从哪里得来的呢？



勾三股四弦五

商高解释说：数是根据圆形和方形的数学道理计算得来的。圆来自方，而方来自直角三角形。将一线折三段围

成直角三角形，一条直角边（勾）为三，另一条直角边（股）为四，则斜边（弦）就是五。

在这里，商高就已明确地指出了直角三角形的三条边有“勾三股四弦五”的数量关系。



规矩图

当周公向商高求教“矩”（三角尺）的用法时，商高回答说：把矩放平了，可测定水平和垂直方向；把矩立起来，可测量高度；把矩翻过来倒置，可以测量深度；把矩卧在地面，可以测量水平距离；将矩环转一周，可以得到圆形；将两矩合起来，可以得到长方形。

商高总结了前人的经验，归纳出了勾股测量的各种方法，开创了勾股测量术的先河。

商高关于“环矩以为圆”的论述，即立于直径上的圆周角为直角这一定理的发现，也比古希腊数学家泰勒斯早五六百年。

在《周髀算经》中陈子提出：欲求斜边长，可用“勾股各自乘，并而开方除之”的方法，已深刻地揭示出直角三角形三边之间的数量关系。

若以定理发现者的名字命名，勾股定理应该称为“商高定理”。因为他比毕达哥拉斯要早6个世纪，就是陈子也比毕达哥

拉斯早一个多世纪。

命名为勾股定理，那是根据定理的几何意义，无可非议。

至于“勾股定理”的发现在数学发展中的作用，那是举世皆知的。聪明的中国人，真是惠泽千秋，功不可没(mò)！

巧测太阳高度

现在提到三角形的性质和怎样解三角形，恐怕只要是读过中学的人都能回答得出来，然而，在古代这可是件了不起的事情。

要想知道可望不可及的太阳有多高，谈何容易，而我们的祖先不但想知道，而且真的测算出来了。

众所周知，任何科学真理的发现，都有其历史的渊源。

古时候，人们对周围的许多事物都充满了好奇和探求的渴望，每当抬头仰望天空，低头俯视大地时，都不免会产生这样的问题：天到底有多高？地究竟有多大？

由于受当时科学水平的限制，人们苦思冥想也找不到解决问题的方法。

于是，只好借助于神灵。这样，开天辟地的神话也就随之而产生了。

相传，大地原来是混沌一团，像个大鸡蛋。不知过了多少岁月，诞生了一位神人盘古，他用斧头把天地一劈两半。从此，天日高一丈，地日厚一丈，盘古日长一丈，如此千年万年地长下去。盘古有多高，天就有多高。

不过神话总是神话，聪明的古代劳动人民，并不满足于玄妙的神话说法，而是大胆地探索，随之也产生了古代天文测量学。

我国是最早应用三角知识进行天文观测的国家之一。在古代数学巨著《周髀算经》中记载着荣方和陈子的对话。

周朝时，有个叫荣方的人，向陈子请教说，听说先生掌握了商高创造的数学机理，能够知道太阳有多高，日光所照的范围有多

广,星星离我们多远,这是真的吗?

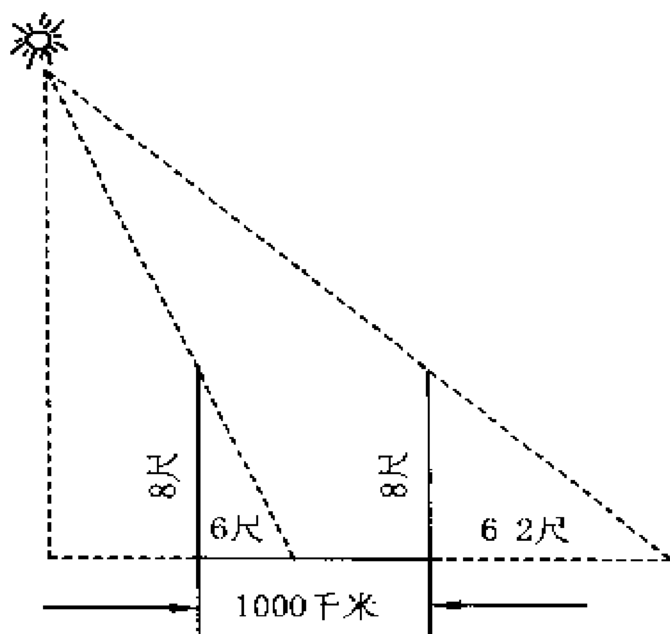
陈子肯定地说,是。

荣方便请求陈子把这种方法教给他,陈子毫不含糊地说:其实,这种方法也没有什么深奥之处,用你所会的数学知识就可以解决,你自己回去想想吧。

荣方回家,思索了好几天,也没理出个头绪来,又去求教陈子。陈子听罢缘由之后说,这不过是望远起高之术,有何难矣!说罢,扬长而去,荣方回去又苦思冥想了好多天,仍然一无所获。

陈子见荣方实在想不出来了,这才告诉他利用直角三角形的特征来测算天高的方法。

陈子的方法是:在都城洛阳中立 8 尺(1 尺≈0.3333 米)高的杆子,在中午时测得杆影长 6 尺;又在北方相距 1000 千米的地方立同样的杆子,测得它的影长是 6 尺 2 寸(1 寸≈0.0333 米)。从而用相似的原理,就可求出太阳离地面的高度是 40003 千米。(如图)



当然,陈子测得的天高,同实际的太阳和地面的距离相差很远,不过,这不是因为方法不对,而是他把大地看作是平面以及测量误差所造成的。

到公元 3 世纪的魏晋时期,魏国人刘徽进一步推广和发展了陈子的测日法,并给出了测量可望而不可及的目标的测算公式:

$$x = \frac{d\,h}{a_2 - a_1} + h$$

式中的 x 是高，d 是两个标杆间的距离，h 是标杆长，a_2-a_1 是两标杆的影差。

这种测算方法叫"重差术"。

"重差术"的确是一大发明，它使人们摆脱了直接测量的束缚和限制，给人们的生产实践活动带来了极大的便利。

西方数学家塔利斯跟陈子几乎是同一时代运用这种方法的，不过，塔利斯测算的是金字塔，而陈子测算的是太阳的高度。

刘徽对测量的造诣之深，不仅超过了当时的西方，即使16—17世纪西方学者的测量术比起刘徽来，也是望尘莫及。遗憾的是当时缺少角的概念，否则，在刘徽的时代，中国也许早已发展完善了一套完整的三角学了。

中国人与方程

学过初等代数的人，都深有体会，用方程或方程组解数学应用题，比用算术法解要容易得多。凡是能用算术解的应用题，用方程或方程组都能解；用算术法不易解或不能解的应用题，用方程和方程组解却是轻而易举的事。

那么，这样一个好方法，是谁首先发明的呢？



这个人就是刘徽。刘徽是中国魏晋时期的大数学家，中国古代数学理论的奠(diàn)基人。他以出色的劳动，完成了对《九章算术》的整理、完善和创新工作，使后人学习数学有了定本。

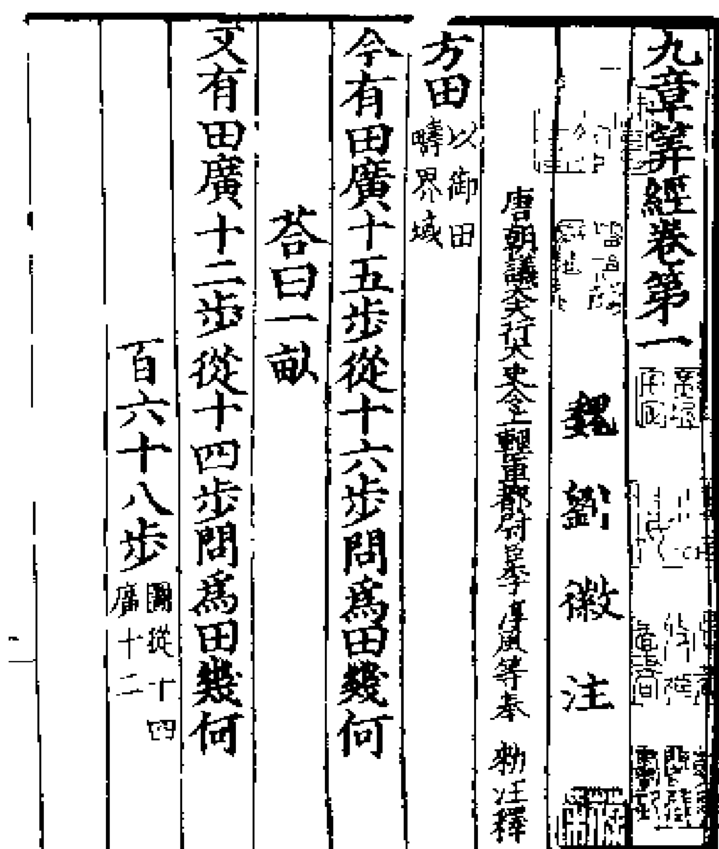
刘徽在《九章算术》注释中说："程，课程也，群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故为之方程。"

其中，"程"指布列的过程；"课程"是指按不同物品的数量关系而列出的式子；"物"指未知数；"实"指式子中的常数项；"令每行为率"指由一个条件列一行式子，每横列代表一个未知数；"如物数程之"指有几个未知数，就列几个方程，并用算筹把方程中的系数分离出来；"并列为行"指整个方程组的系数构成的方阵。

我国古代数学中的方程，也就是我们今天说的方程组。我国古代用算筹记数、计算，同样地用算筹来解方程组，方法极为巧妙。

《九章算术》最早使用“方程”这个词。在这部著作中第八部分全是方程问题。不过那时方程的意义与现在的不同，是指线性方程组。

《九章算术》还表达了方程组的详细解法，即直除法，与现代的加减消元法完全一致，这在世界数学史上是一个伟大的创举。


九章筭經卷第一

魏 劉徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勑注釋

方田 以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

百六十八步 圖從十四廣十二

《九章算术》书影（宋嘉定六年刻本）

刘徽对方程下了确切的定义，并揭示了方程的同解原理。

《九章算术》中的有关方程的解法，是世界上最早最完整的解法。在国外，它最早出现在7世纪初印度婆罗摩笈多的书中。在欧洲是法国数学家布丢在1559年提出的。

至于方程组的完整理论，西方直到1693年莱布尼兹发明行列式时才开始讨论，比刘徽要晚1400多年。

中国人早在1700多年前就掌握了如此系统化的解方程的方法，的确令世人敬佩！

今有术

“今有术”是我国古人计算比例问题的一种算法。利用它，如果知道所有数，以及所有数与所求数之间的比率，就可以算出所求数。其公式为：

所求数 = 所有数 × 所求率 ÷ 所有率

刘徽认为，“今有术”是一种普通算法。凡是九数中的问题，只要能找出其中的率关系，都可归于“今有术”。

对此，我们不妨看一下《九章算术 · 均输》中的一道题（译文）：

一个人骑马离开旅馆时忘带衣服，过了$\frac{1}{3}$天，主人发现了，骑马追上客人把衣服还给他。回家时已过$\frac{3}{4}$天。客人的马一日行300里（1里 ≈ 500米），问主人的马一日行多少里？

刘徽是这样计算的：

$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$是主人追客来回用日率；$\frac{5}{24}$是主人追客用日率；$\frac{5}{24}+\frac{1}{3}=\frac{13}{24}$是客人被追上前用日率。而主人用日率即客人马行率，客人用日率即主人马行率。因此客人马行率5为所有率，主人马行率13为所求率，300里为所有数。

所以，主人马一日行程 = 300里 × 13 ÷ 5 = 780里。

按比例分配方法，古代叫衰分术。各部分的比例叫列衰。

《九章算术 · 衰分》中还有这样一个题目：

牛、马、羊吃了人家的青苗，苗主人要求赔偿5斗（1斗=10升）谷子。羊主人说：我的羊只吃了马的一半；马主人说：我的马只吃了牛的一半。问各需赔偿多少？

依衰分术，列衰是4、2、1，那么，

羊：50升÷(4+2+1)×1=$7\frac{1}{7}$升，

马：50升÷(4+2+1)×2=$14\frac{2}{7}$升，

牛：50升÷(4+2+1)×4=$28\frac{4}{7}$升。

刘徽在《九章算术》注释里，例论结合，精辟地阐述了"今有术"，并总结出从3个已知数求出第四个数（未知数）的算法。

即　若 $a:b=c:x$，

则　$x=\frac{bc}{a}$。

因此，他把一切按比例分配问题的解法，都理解为"今有术"的应用。

《九章算术》中的"今有术"是完整的比例解法，这种方法传到印度后叫"三率法"，而欧洲把这种方法叫做"三数法则"，也叫"黄金法则"。

"今有术"在西方国家出现得较晚，直到13世纪才由意大利学者斐波那契首次加以介绍。而把比例与"三数法则"联系起来，形成解决比例问题的简捷方法，那是15世纪以后的事，这也比刘徽晚了1200多年。

分数与小数的使用

在日常生活和经济领域中，处处都离不开数。其中的分数和小数给人们带来了不可估量的方便。究其根底，分数和小数还是我们中国最先使用的哩！

顺着数学史的长河逆流而查，在我国先秦典籍和《周髀算经》中，就已经大量使用了分数。

不过，关于分数的完整理论，则是出现在《九章算术 · 方田》中。该章首先谈到的是约分法则，即：分子、分母能同时被 2 除，则先被2除，不能被2除，则在旁边使分子、分母以少较多，辗转相减，求其最大公约数（称为等数），以此约分。

有趣的是，这种方法与数学家欧几里得求最大公约数的方法不谋而合。

例如，《九章算术 · 方田》第六题，化简分数$\frac{49}{91}$为：

$$\boxed{\frac{49}{91}} \longrightarrow \boxed{\frac{49}{42}} \longrightarrow \boxed{\frac{7}{42}} \longrightarrow \boxed{\frac{7}{14}} \longrightarrow \boxed{\frac{7}{7}}$$

7 便是最大公约数，然后以 7 约分子、分母，便将$\frac{49}{91}$化简为$\frac{7}{13}$。

分数的加法，称为“合分”，减法称为“减分”。法则是：

分母互乘分子，相加（减）作为实，分母相乘作为法，实与法而一，即：

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{db} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

这里便用到通分，只是没有用最小公倍数作分母。

分数乘法称为“乘分”。法则是：分母相乘为分母，分子相乘为分子，即：

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

这与现在的法则完全一致。

分数除法叫“经分”。《九章算术》将实和法通分，使分子相除，即：

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{cb}{db} = \frac{ad}{bc}$$

这里刘徽提出了颠倒相乘法，即：

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

跟现在的解法完全相同。

再翻开数学史，还可发现，小数的产生比分数晚得多。刘徽在开方开不尽时用十进分数（微数）逼近无理根的近似值，开了十进小数之先河。

同时，古代用分、厘、毫、丝、秒、忽表示分以下的奇零部分，赝（yàn）本《夏侯阳算经》常常用某个整数单位表示，不再列出微数单位，如将绢1525匹3丈7尺5寸化为1525匹375，这实际上是一个十进小数。

以后，南宋著名数学家秦九韶和宋元时期著名数学家李冶都将1863.2寸表示成1863寸2，这跟现在记法基本相同。

还有，南宋数学家杨辉、宋元时期的数学家朱世杰都先后总结了民间化斤两为十进小数的歌诀。

刘徽提出的颠倒相乘的分数除法法则，是世界上最早的分数除法法则。据资料证实，分数算法大约在15世纪才在欧洲流行，

而且它源于印度。而印度在7世纪才有分数运算法则。

中亚的阿尔·卡西在15世纪才掌握十进分数;欧洲则在16世纪末年才有十进小数概念,而且记法远不如唐宋时期中国的简单。

所以,世界数学史家认为:中国是世界上最早使用分数和小数的国家。

盈不足术

解数学难题，需要开动脑筋，苦思冥想。所以，自古以来，人们都在千方百计探求解难题的简便方法。在这一领域，我们的祖先创造的“盈不足术”，确实令人耳目一新。

盈不足术，是我国古代解决盈亏类问题的一种算术方法，最早见于我国古代数学名著《九章算术》（1 世纪）。其中专辟一章论述它，名为“盈不足”。

该章开头的第一个问题是：“今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四，问人数、物价各几何？”

用现在的话说就是：“现在要合买一物品，每人拿出 8 钱（货币单位），多 3 钱；每人拿出 7 钱，还缺 4 钱，问人数、物品的价格各为多少？”

这种类型的题目，是有关盈不足的典型问题，可用通用的数学符号表示如下：

设每人出 a_1，盈（或不足）b_1；每人出 a_2，盈（或不足）b_2，其中在“盈”时，$b_1, b_2 > 0$，“不足”时，$b_1, b_2 < 0$。

《九章算术》中给出了这个问题的一般解法，即平均每人应出钱数 x，人数 p 和物价 q，可分别用下列公式计算：

$$x = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 - b_2} \qquad (1)$$

$$p = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \qquad (2)$$

$$q = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 - a_2} \qquad (3)$$

在上述问题中，由公式(2)、(3)可得人数 $p = 7$，物价 $q = 53$。

盈不足术是我国数学史上的一项杰出成就。用盈不足算法不仅能解决盈亏类问题，而且还能解决一些更为复杂的问题。

11—13 世纪，一些阿拉伯的数学著作中，也出现了盈不足术，并称之为天秤术或契丹算法。

在欧洲中世纪，为了解决 $px - q = 0$ 这种类型的问题，有时用到所谓的"双设法"，即通过假设以求未知数的方法。

这种方法的大意是：设 a_1 和 a_2 是 x 的两个假设值，b_1 和 b_2 是差值，这时有：

$$a_1 p - q = b_1 \qquad (4)$$

$$a_2 p - q = b_2 \qquad (5)$$

(4) - (5)，得 $p(a_1 - a_2) = b_1 - b_2$

则 $p = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$

再用(4)·a_2 - (5)·a_1，得 $-q(a_2 - a_1) = a_2 b_1 - a_1 b_2$

那么，$q = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 - a_2}$

而 $x = \frac{q}{p} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 - b_2}$

在符号代数发展起来之前，双设法是中世纪欧洲解决算术问题的主要方法。当时，这种方法还有许多别的名称，如双假位法或迭借术、增损术等。

中国的盈不足术问世后，经丝绸之路西传至中亚细亚阿拉伯国家，在那里受到特别重视，被称为契丹（中国古代北方的一个少数民族）算法，后来又传入欧洲。

13世纪的著名意大利数学家斐波那契在《算盘书》中说："契丹法，阿拉伯名词，拉丁译文当为迭借法……亦称增损术"，明确指出了这种方法的渊源在中国。

在现代数学中，盈不足术也不失为一种有效的方法。例如，求$f(x)=0$的实根近似值，其原理便是盈不足术。

盈不足术，是中国人对世界数学宝库的重要贡献，它在世界数学史上占有极其重要的位置。

刘徽割圆术

一看到“π”，谁都知道是圆周率，而且脑海马上会出现一串数字：3 1415926…然而，在世界上，圆周率是由谁首先比较精确地计算出来的呢？他就是我国古代魏晋之际的杰出数学大师——刘徽。

据史料记载，刘徽从少年时期就对圆周率的研究很感兴趣。

起初，刘徽虽绞尽脑汁，却始终没有找到研究圆周率的好方法。一次，他路过一个石料厂，看见石匠在加工石料。本来是一块方石，经石匠师傅砍去四角，就变成了一块八角形的石头；再去掉八个角，又变成了十六角形。这样一斧一斧地干下去，一块方形石料就被加工成一根光滑的圆柱了。

真没想到，这个被一般人看来非常普通的事情，却触发了刘徽智慧的火花。

刘徽想，石匠加工石料的方法，可不可以应用于圆周率的研究呢？

在此事的启发下，刘徽发明了亘(gèn)古未有的“割圆术”，较精确地计算出了圆周率。

在刘徽注释的《九章算术》中，他详细地介绍了用割圆术计算圆周率的方法。

所谓割圆术，就是在圆内作内接正多边形，然后用正多边形的面积逼近圆面积来计算圆周率的近似值。他知道圆内接正多边形的面积小于圆面积。但是，正多边形的边数愈多，它与圆面积相差越少；当边数无限增大时，多边形面积就与圆面积相等。

刘徽在割圆术中所体现出来的思想,闪烁着极限思想的光辉,为我国后来的数学家计算圆周率指出了方向。

他依据上述原理,巧妙地计算了圆周率。他设圆面积为 S,圆内接正 n 边形、正 $2n$ 边形的面积分为 S_n、S_{2n},它们之间有以下关系:

$$S_{2n} < S < S_{2n} + (S_{2n} - S_n)$$

于是,他反复利用勾股定理得到了一个普遍公式,即已知圆的半径为 r,圆内接正 n 边形的边长为 a_n,可求得圆内接正 $2n$ 边形边长 a_{2n} 为:

$$a_{2n} = \sqrt{\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - a_n^2})}$$

刘徽利用上面的公式,沿着割圆术的思路,从圆内接正 6 边形算起,边数依次加倍,相继算出正 12 边形,正 24 边形 …… 直到正 192 边形,得到:

$3.141024 < \pi < 3.142704$

后来,他又算到圆内接正 3072 边形的面积,求得 π 为 $\frac{3927}{1250}$ 即 3.1416。这个结果在当时的世界上是首屈一指的,令今人也叹服不已。

刘徽的割圆术,在当时世界上,把圆周率的计算推上一个新的高度,为圆周率研究工作,奠定了坚实可靠的理论基础。其方法也比古希腊数学家阿基米得(前 287—前 212)用圆内接和外切的多边形计算,在程序上要简便得多,可以收到事半功倍的效果。而且,更重要的是,他用有限去逼近无限的思想方法,孕育着极限观念,对数学的发展有着深远的影响,是他开创了常量数学向变量数

学发展的新纪元。

国外的学者一致公认:"在刘徽的时代,很难在世界范围内找到一个能够和刘徽相比的数学家。""从对数学贡献的角度来衡量,刘徽应该与欧几里得、阿基米得相提并论",又称"刘徽是古代世界数学泰斗"。

九九歌诀

谁都知道，乘法是求相同加数和的速算方法。要做好乘法，首先要背熟九九表，也就是我们通常说的“小九九”。那么，顺着历史的足迹追寻，是谁首先发明了“小九九”呢？

我国是世界上采用“小九九”最早的国家之一。现在的口诀是从“一一得一”起到“九九八十一”止。

然而，最早的九九歌却不是这样的，而是倒过来的，从“九九八十一”起，到“二二而四”止。

后来，又扩充到“一一而一”。因为开头两个字是“九九”，所以乘法口诀简称“九九歌”。

提起“九九歌”，还有一个有趣的历史故事哩。这个故事是汉代一个名叫韩婴的人在《韩诗外传》中记载的。

齐桓公是春秋时期齐国的国君，为了富国强兵，齐桓公特意设立了“招贤馆”，招聘贤才。可是过了一年多，一直无人应聘。

有一天，招贤馆来了一位乡民前来求见，齐桓公说：“你有什么本领？”

“我会‘九九歌’。”乡民回答。

齐桓公嘲笑他说：“会背‘九九歌’也算本领吗？”

乡民回答说：“会背‘九九歌’确实算不上什么大本领，但是如果你对我也能以礼相待，还怕比我高明的贤士不来应聘吗？”

齐桓公觉得这个乡民说得很有道理，就把他迎进招贤馆，并以上宾待之。这个消息不胫（jìng）而走，果然，一个月之后，四面八方的贤士就接踵而来了。

《韩诗外传》中的故事，不但说明了齐桓公是怎样礼贤下士的，更为重要的是说明了在2600多年前，对中国人来说，懂得九九歌诀已不是什么希罕的事情了。

在我国敦煌等地出土的西汉竹简（竹简是我国古代人用来写字的竹片）上，记载着不完整的九九歌。

例如，敦煌的汉简中的九九歌共16句，即是：

九九八十一　八八六十四　五七卅五　八九七十二　七八五十六

四七廿八　七九六十三　六八卅八　五八卅(xì)　三七廿一

□□□□　二三而六

五五廿五　二二而四

四五廿

三五十五

就此，我们对九九歌的演变可窥见一斑了。

据考查，九九歌诀在中国于公元前2500年就已经产生了，它是古代中国人创造出的灿烂文化之一。

当今世界已进入电子时代，人们可以用电子计算器来计算了，然而，九九歌诀却永远无法予以代替。在很多情况下，人们还要使用九九歌诀。九九歌诀有着强大的生命力。

集前辈之大成的赵爽

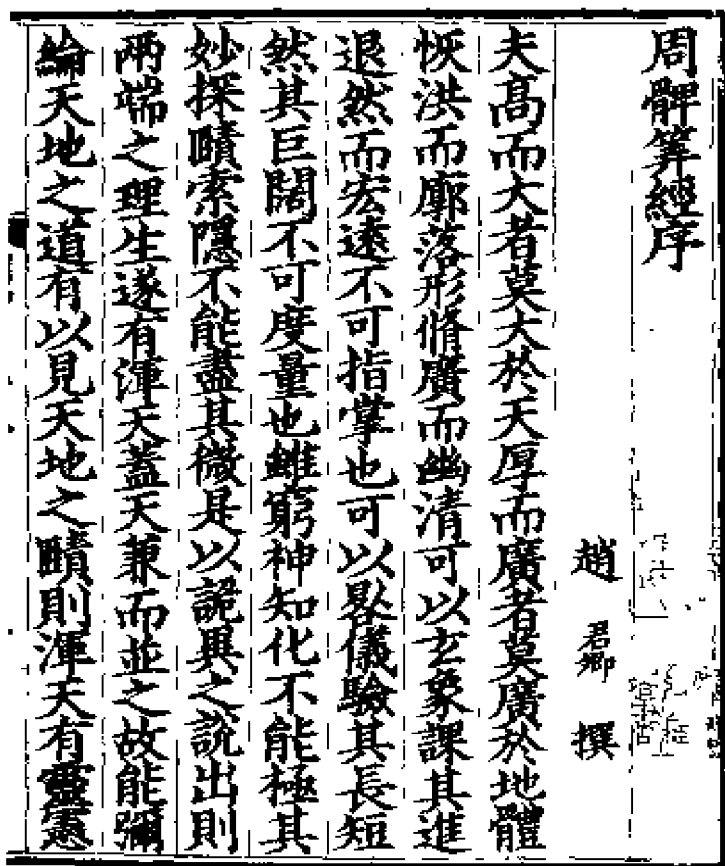
翻开中国古代数学史，你马上会被一位终生在数学的大海中漫游、集前辈之大成、在应用数学和数学理论方面均卓有建树的数学家——赵爽所吸引。

赵爽三国时吴国人。他生平酷爱数学，刻苦钻研，学风严谨，重视引申及举一反三能力的培养，因而在数学研究中建树颇丰。

赵爽倾其一生心血注释了《周髀算经》。

他突出的成就之一，是在分数运算中概括出了“齐同术”。用现代的话说就是：不同分母的分数进行通分。

若$\frac{a}{b}$和$\frac{d}{c}$是两个分数，则称ac，bd为齐，称bc为同。将$\frac{a}{b}$和$\frac{d}{c}$分别化为$\frac{ac}{bc}$和$\frac{bd}{bc}$以后，就可以进行加、减运算了。


周髀算經序

趙　君卿　撰

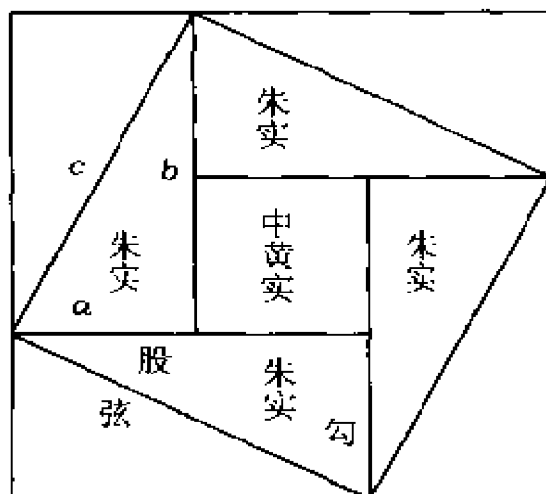
夫高而大者莫大於天厚而廣者莫廣於地體恢洪而廓落形脩廣而幽清可以玄象課其進退然而宏遠不可指掌也可以晷儀驗其長短然其巨闊不可度量也雖窮神知化不能極其妙探賾索隱不能盡其微是以詭異之說出則兩端之理生遂有渾天蓋天兼而並之故能彌綸天地之道有以見天地之賾則渾天有靈憲

《周髀算经》书影（宋嘉定六年刻本）

赵爽对齐同术所做的理论概括和具体说明，为后来大数学家刘徽全面地总结“齐同术”做出了重要的理论准备。

他的突出成就之二是，以超人的智慧，仅用勾股方图和500余字的评注，就简明扼要地总结出中国古代勾股算术的深奥原理。

他把勾股定理表述成：“勾股各自乘，并之为弦实，开方除之即弦”，并用一个弦图加以证明。



图中的大方（称为“外大方”）的边长为勾股之和，中方（称“弦实”）的边长为弦，小方（称“中黄实”）的边长为勾股差。弦实中的每个勾股形的面积为一个朱实，共有朱实四。

通过对图形割补损益的等积变换方法，实现了勾股定理的证明。

证明过程，若用现代符号表示就是：

设 a、b、c 分别为勾股形的勾、股、弦，则一个朱实是 $\frac{1}{2}ab$，四个朱实是 $2ab$，中黄实是 $(b-a)^2$。所以

$$c^2 = 2ab + (b-a)^2 = a^2 + b^2$$

上述关系式在弦图中是十分明显的。可见赵爽对勾股定理的证明是多么简捷而直观。

赵爽在勾股圆方图及注中，独具特色地利用“出入相补原理”，证明了勾股算术中诸多公式。

他的突出成就之三是：着重介绍了“重差术”。

重差术是中国古代天文学家用来推算太阳高度的一种方法。它的具体方法是：

假定大地是充分延展的平面，在南北方向上相距足够远的两地，分别立等长的标杆一支，测得夏至正午时的杆影之长，然后由影长之差及两杆之间的距离，推算出太阳的高度。

赵爽是中国古代对数学定理和公式进行证明与推导的最早的数学家之一。他虽为《周髀算经》作注，但他的贡献却是带有开创性的，在中国古代数学发展中占有重要地位。

赵爽对勾股定理的证明，与欧几里得《几何原本》中的证明相比，后者就有点相形见绌(chù)了。

孙子剩余定理

韩信是我国西汉的一位开国名将，他不但善于征战，而且还巧于计算。韩信点兵，神机妙算的故事，在当时的军营中就广为流传。即使现在讲出来，你也会感到新奇的。

在一次阅兵时，值日官向韩信报告说："2000 名士兵全部到齐，请将军检阅！"

韩信一声不响地走上点将台，挥动着令旗，士兵们按照号令，第一次排成 3 路纵队，结果末尾多出 1 人；第二次改成 5 路纵队，结果末尾多出 2 人；再改成 7 路纵队，结果末尾多出 3 人。

于是，韩信对值日官说："有 58 人没来操练，怎么能说全部到齐了呢？"

原来，部下对年轻的韩信有点瞧不起，值日官根本没认真清点人数，满以为可以瞒过他，岂知，清点的结果果然是实到 1942 人，缺少 58 人。

从此，韩信赢得了部下的尊重，再也没人敢小看他了。

其实，上面只是一则民间故事，有附会之嫌，但这种神机妙算的方法，在我国南北朝时期的数学名著《孙子算经》中确有类似的题：一数被 3 除余 2；被 5 除余 3；被 7 除余 2；问该数是多少？这属于数论的一次同余方程组问题。用现代数学符号可表示为求下列同余方程的整数解：

$$
\begin{aligned}
N &\equiv R_1 \pmod{3} \\
&\equiv R_2 \pmod{5} \\
&\equiv R_3 \pmod{7}
\end{aligned}
$$

式中 $R_1 = 2, R_2 = 3, R_3 = 2$。

《孙子算经》中使用一种适合解一般的一次同余方程组的方法,求得此特殊问题的最小整数解 $N = 23$。

解题步骤是:选定 5×7 的一个倍数,被 3 除余 1,即 70;选定 3×7 的一个倍数,被 5 除余 1,即 21;选定 3×5 的一个倍数,被 7 除余 1,即 15。然后按下式计算:

$$N = 70R_1 + 21R_2 + 15R_3 \pm 105P$$

(此式是一般解法。而此题有更简便的解法。仔细观察 3 与 7 的余数同是 2,我们就可以取 3 和 7 的最小公倍数 21,再加上 2 为 23,23 除以 5 正好余 3,23 就是所求的最小整数解。见《自学成才的数学大师华罗庚》)

式中 105 为 3、5、7 的最小公倍数,P 为适当选取的整数,使得 $0 < N < 105$。这里取 $P = 2$,运算符号取减号。

这类问题以及它的解法,由我国南宋著名天文学家、数学家秦九韶进一步简化完善,称为"大衍求一术"。尔后到明朝程大位编著的《算法统宗》里,用一个歌诀,十分巧妙地指出了这类问题的解法:

三人同行七十稀,
五树梅花二十一,
七子团圆正半月,
除百零五便得知。

意思是说:用某数除以 3 所得的余数乘以 70,除以 5 所得的余数乘以 21,除以 7 所得的余数乘以 15,然后将 3 个乘积相加,再根据该数的范围,加上或减去 105 的倍数,就是所求的数。韩信点兵就是按下式计算的。

$$1 \times 70 + 2 \times 21 + 3 \times 15 = 157$$

$$157 + 105 \times 17 = 1942$$

1852年,英国传教士把"孙子剩余定理"和秦九韶的"大衍求一术"带到欧洲。它跟德国数学家高斯1801年研究出的代数一次同余式问题及其解法是完全一致的。然而,高斯的研究成果要比中国晚得多。若从《孙子算经》算起那要相差1000多年。因此,国际上称《孙子算经》中的上述问题为孙子剩余定理,或中国剩余定理。

孙子剩余定理有着光辉的历史意义和现实意义。1970年,苏联数学家尤里解决了德国数学家希尔伯特1900年在巴黎国际数学家大会上提出的23个数学问题中的第7题,轰动了整个数学界。他在解决这一难题时,用到的数学知识很多,但在关键之处,却使用了中国人早在1000多年前就发明的"孙子剩余定理"。

直到今天,西方数学家对此仍投以浓厚的研究兴趣。如1973年勒雷希(比利时人)在美国出版的一部数学史专著《十三世纪的中国数学》一书中,评论秦九韶时说:"秦九韶在不定分析方面的著作颇早,考虑到这一点,我们就会看到,萨顿(美国科学史家,1884—1956)称秦九韶为'他那个民族,他那个时代,并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一',是毫不夸张的。"

百鸡问题

百鸡问题是世界数学史上的一道名题。它既妙趣横生，又深奥难解。然而，就是这样的一道数学难题，倒被我国南北朝时期的一位少年解开了。

原来，百鸡问题起源于一个故事。

在我国南北朝时期，一位宰相为了考核少年张丘建的数学水平，让他拿 100 文钱到市场上买公鸡、母鸡、小鸡共 100 只。当时市场上的价格是：公鸡每只 5 文钱，母鸡每只 3 文钱，小鸡每 3 只 1 文钱。

张丘建很快买来 4 只公鸡，18 只母鸡，78 只小鸡。宰相一算，恰好是 100 文钱买了 100 只鸡，高兴得赞不绝口。

百鸡问题用现代的话讲，就是三元一次不定方程组问题。在我国数学史上，首先明确提出不定方程问题的是刘徽。尔后，南北朝时期的《张丘建算经》（约成书于 5 世纪）将这一问题的研究进一步深化。

百鸡问题的解法是这样：

设买公鸡、母鸡和小鸡分别为 x 只、y 只和 z 只，依题意得：

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & (1) \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 & (2) \end{cases}$$

三个未知数，两个方程，是不定解方程组

(2) × 3 得　$15x + 9y + z = 300$　(3)

(3) − (1) 得　$14x + 8y = 200$

即 $7x + 4y = 100$

$\therefore \quad y = \frac{100 - 7x}{4}$

$\because \quad x、y、z$ 是自然数

则 $100 - 7x > 0$

$\therefore x < 15$

又 $100 - 7x$ 必须是 4 的整数倍

$\therefore \quad x = 4, x = 8, x = 12$

所以有三组解：

(1) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 18 \\ z = 78 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = 8 \\ y = 11 \\ z = 81 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \\ z = 84 \end{cases}$

令人遗憾的是,《张丘建算经》中只写出了答案,却没有写出具体解法。

其后,人们一直没对百鸡问题的算法深究。直到清朝时,骆腾凤、丁取忠等用“大衍求一术”求解,才找到了百鸡问题的巧妙解法。

百鸡问题在世界上流传很广泛,对阿拉伯、欧洲数学均产生了深远的影响。9 世纪印度的摩诃毗罗和 12 世纪婆什迦罗第二的著作,以及 13 世纪意大利斐波那契的《算法之书》、15 世纪阿拉伯的阿尔·卡西的《算术之钥》之中,都有百鸡问题。

显然,这些都源于中国,因为中国的百鸡问题比他们要早好几个世纪。

祖冲之与圆周率

在月球背面有一座环形山，被苏联科学院定名为"祖冲之环形山"。它是以中国数学家祖冲之的名字命名的。

究其原因，是因为祖冲之一生在数学方面，特别是在圆周率方面的伟大贡献。

祖冲之(429—500)是我国南北朝时期伟大的数学家、天文学家。他卓越的成就之一就是对圆周率的精确计算。



圆周率就是圆周长度和直径长度的比。这是一个无限不循环小数，也就是说它是个没完没了的小数，各位数字的变化也没有规律。

计算圆周率的方法是在一个圆里画一个内接正多边形，计算这个正多边形的边长，就可得到圆周的近似值。正多边形的边数越多，总的边长跟圆周就越是接近。祖冲之从圆的内接正 6 边形开始，接着算内接正 12 边形的边长，再算内接正 24 边形的边长，再算内接正 48 边形的边长……边数一倍一倍地增加，算到了内接正 12288 边形的边长，最后算到了内接正 24576 边形的边长。这时，每条边已经与圆周紧贴在一起了。

祖冲之计算的结果为：

正 12288 边形的各边总长是 3.14159251 丈；

正 24576 边形的各边总长是 3.14159261 丈。

我们可以看出：正 24576 边形各边总长比正 12288 边形各边总长只增加0.0000001 丈。

祖冲之经过艰辛的计算，终于得出较精确的圆周率：如直径为 1，圆周大于3.1415926（朒数），小于 3.1415927（盈数）。

这个结果用现代数学形式可以写为：

$3.1415926 < \pi < 3.1415927$

这可是一种艰难而繁杂的工作，当时的困难是难以想像的，既没有算盘，又无阿拉伯数码，运算全靠用竹子削成的小棍——算筹，来拼摆成各种数字。如 2398 为𝍪𝍢𝍱𝍧。

这样，一切加减乘除，全靠这些竹棍在桌子上摆来摆去。

为了进行这个史无前例的大运算，祖冲之和儿子祖暅（gèng）先上山砍竹子，把竹子劈成细条，再把细条截成一小截儿一小截儿，院内堆起了一座座竹棍的小山。

他们夜以继日地计算着，指头磨破了，绿色的斑竹染上了斑斑的血迹。不知奋斗了多少个日日夜夜，才完成了这艰巨的计算。

是啊，如果没有献身科学的精神，没有熟练的技巧和超人的毅力，对如此复杂的运算工作简直不敢想像。正是：

3.1416 虽无声，却是滴滴鲜血来凝成。

中国古代有用分数表示数量的习惯，因而祖冲之又提出了圆周率的近似值：

约率：$\pi = \frac{22}{7}$，密率：$\pi = \frac{355}{113}$。

前者近似于 3.14，比较简单，称为“约率”；后者约等于 3.1415929，比较精密，称为“密率”。

密率是祖冲之的一项伟大发明，与现代有人算到 2000 位小数

的圆周率数值相比，相差不到千万分之四。并且，$\frac{355}{113}$是一个很有趣的数字，分母、分子是最初的3个奇数1，3，5重复写出，再分两段构成，不仅便于记忆，而且好看，有独特的数学美。

祖冲之计算的圆周率的近似值，从5世纪到15世纪，保持世界记录长达千年之久，这在世界科技史上是十分罕见的。正如李约瑟所指出"中国在公元3世纪到13世纪之间保持一个西方所望尘莫及的科学知识水平"，而且中国的科学发明和发现，"往往远远超过同时代的欧洲，特别是15世纪之前更是如此"。

据史料记载，直到1424年，中亚细亚数学家阿尔·卡西才打破了祖冲之的世界纪录。

在欧洲，密率$\frac{355}{113}$直到1573年才为德国数学家V·奥托所发现，迟于祖冲之1111年。

正因为这样，日本数学史家三上义夫建议将密率这个分数值命名为"祖率"，以纪念祖冲之的杰出贡献。

祖暅原理

我国古代著名的数学家祖冲之，是举世闻名的人物，他的儿子祖暅，也是一位杰出的数学家，对数学做出了巨大的贡献。其中最为突出的就是“祖暅原理”。

祖暅，字景烁。传说，他学习非常努力，读起书来连打雷都听不见。有时边走路边思索问题，撞到别人身上都不知道。他博学多才，见多识广，曾和父亲一起研究天文、数学问题，取得了许多重大成果，深受父亲的赏识。父亲去世后，他继承父业，刻苦钻研天文历法和数学。在数学上，祖暅在继承前人研究成果的基础上，解决了球体体积计算问题。

当今，要计算球的体积是一个非常简单的事情，然而，在古代，却是数学家长久没有解决的棘(jí)手难题。

三国时代，勾股算术的集大成者赵爽做过研究，但没有得出球的体积公式。

再作进一步研究的是同时代的数学家刘徽，他在球外做外接立方体，再用两个直径与球相等的圆柱从正侧面贯穿。这时，球体正好被包含在两个圆柱相贯的公共部分，而且与圆柱相切。他还确定了球与两圆柱的公共部分，当用一水平截面去截时，它们相应截面面积之比总是为 π:4，还知道这正好也就是球与两圆柱的公共部分的体积之比。

于是，设球的体积为 $V_{球}$，两圆柱的公共部分的体积为 $V_{公}$，则：

$$V_{球}:V_{公} = \pi:4$$

$$\text{还可写成}\quad V_{球} = \frac{\pi}{4}V_{公}$$

从这个公式不难看出，要求出球的体积，只要知道 $V_{公}$，这个问题便可迎刃而解了。然而，两圆柱的公共部分 $V_{公}$，刘徽始终没有解决，上天便把这一重大任务交给了祖暅。他通过研究，发现了一个重要的原理：

幂势即同，则积不容异。

这意思是说：在两立方体中做与底平行的截面，若对应处的截面积都相等，则两立体体积相等。这一原理被称为“祖暅原理”。

祖暅利用这个原理，计算出了刘徽球体积公式中的 $V_{公}$，再根据刘徽的体积公式 $V_{球} = \frac{\pi}{4}V_{公}$，便得到了球体积公式：

$$V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3, R\ \text{为球的半径}$$

祖暅原理和球的体积公式有着重要的应用价值，也有过有趣的传说和实例。

据说，北魏有一位官吏，拿了两个表面上极其相似的铜龙，请祖暅判断它的体积是否相等。祖暅不慌不忙地拿出一根丝线，量了它们相应的周长，计算出了它们的截面面积。由于值不等，他立即得出了这个问题的答案：这两个貌似相同的铜龙的体积不等。

后来，铜匠用铸铜龙时所耗铜料的多少证明了祖暅的答案完全正确，对此，这位官吏惊叹不已。

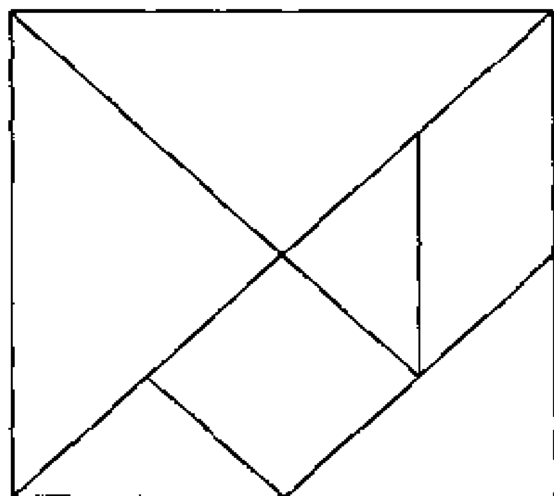
祖暅原理在西方被称为“卡瓦列里原理”，这是因为 17 世纪意大利数学家卡瓦列里（1598—1647）重新发现了这一原理。事实上这要比祖暅晚 1000 多年。历史公正地说明了祖暅才是世界上第一个解决了球体积难题的人。

中国古代的智力玩具

当今,魔方这种智力玩具风靡全球。然而,在我国古代,就有许多与魔方媲美的智力玩具。它们历史悠久,为人们特别是青少年所喜爱。而且,早在几百年前,它们就传到了国外,令许多外国人着迷。

七巧板是一种拼板玩具,起源于我国古代的一种可以错综分合的案几。

宋代,黄飞睿(ruì)曾撰有《燕几图》。书中记载,起初此类案几数为六,有一定尺寸,称“骰(tóu)子桌”。后增一小几,合为七,易名“七星”。这种案几原是供富人玩乐的,后来,逐渐演变成一种小玩具——七巧板。



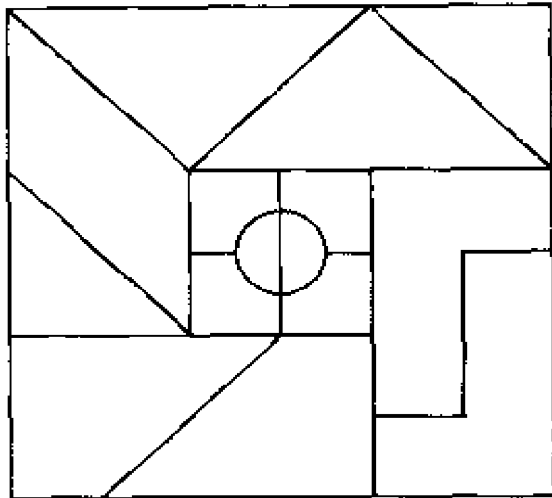
七巧板示意图

七巧板是用一块正方形纸板,按照图示的样子,分成7小块而制成的。根据七巧板的特征和板与板之间的相互联系,用七巧板可以拼成很多几何图形以及许多有趣的人物、动物、建筑物等。

清代,有一位叫童叶庚的人,将七巧板加以改进,7块变成了15块,改名为“益智图”。顾名思义,就是有益于智力的图板,这名字是最恰当不过了。过去许多文人还用它拼成戏文诗画呢。

九连环,也是我国古代的一种智力玩具。据考证,它的历史最少也有几百年了。它的结构比拼图玩具稍微复杂一点,是用铁丝

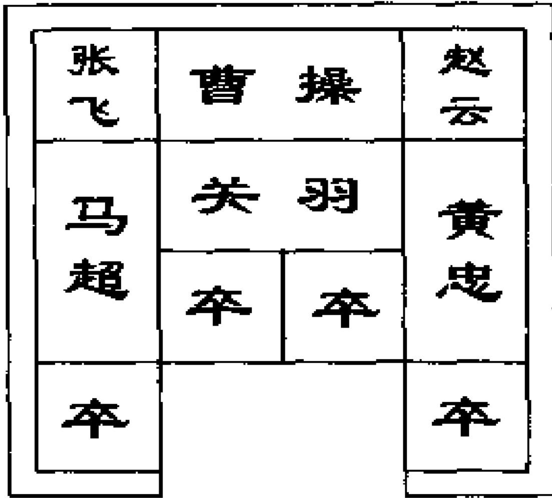
和铁片制成的。它共有9个环和一个柄，玩法是要把9个环一个一个套到柄里去，然后一个一个取下来，看起来不难，里面却包含着丰富深奥的数学知识。



益智图示意图

我国古代有一些智力玩具还和历史故事联系起来，非常有趣。“华容道”棋盘就是其中之一，它源于《三国演义》中曹操败走华容道的故事。

曹操在赤壁之战中打了败仗，好不容易才从华容道上逃出来。此时，棋盘上仅有两个小方格空着，要求你通过这两个空格移动棋子，用最少的步数把曹操移出华容道。



华容道棋盘示意图

“包你迷”也是一种智力玩具。这种玩具制作很简单，找4个一样大小的正方体木块或纸盒，在它们的6个侧面上涂上4种不同颜色。玩法是把4个正立方体叠成一个正棱柱，使棱柱的4个侧面都分别有4种颜色。

中国的智力玩具，得到了世界各国人民的喜爱。清朝时七巧板传到国外。据说，拿破仑一世就很爱玩七巧板。由于这个有趣的图块诞生在中国，因此，外国人称它为“唐图”或“中国的图块”。

尤其值得大书一笔的是，中国古代的智力玩具，不仅对智力开

发大有裨益，而且其中的七巧板、益智图还与几何学有着密切关系，九连环则包含深刻的拓扑学原理，包你迷中则涉及离散数学课题，华容道棋盘被誉为智力游戏界的四大不可思议问题之一，编进了大学电子计算机系的教科书。

凡此种种，都闪烁着中国人的智慧之光，影响深远。当今它们都成了人工智能的研究对象，可见其对智力开发的极大作用。

正负数及其加减运算

数的产生和发展，来源于生产实际的需要，也是数学本身发展的必然。小学里学过的零、自然数和分数（或小数）如此，负数也不例外。

然而，负数的存在，却在好长的一段历史时期不被人们认识，甚至有人根本不予承认，其“身世”真是坎坷啊！

我国古代数学家刘徽在注释《九章算术》中，第一个阐述了正负数的概念，并首先使用了负数、正数的加减法则。

刘徽说：“两算得失相反，要令正负以名之。”这是关于正负数的明确定义。“算”是算筹，代表数字。两算得失相反的数，分别叫正数和负数。

刘徽给正负数下的定义，跟现在数学课本上的定义完全一致，可以说是经典性的。

《九章算术·正负术》曰：同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之；其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。

这正是正负数的加减法则，同名、异名是现在我们说的同号、异号。

前 4 句是减法法则。意思是说：

如果两数是同号，则其差的绝对值是其绝对值的差：

$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b) \qquad (a \geqslant b>0)$

$(\pm a)-(\pm b)=\mp(b-a) \qquad (b \geqslant a>0)$

如果两数是异号，则其差的绝对值是其绝对值之和：

$(\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b) \qquad (a>b>0)$

正数没有与它对减的数，则为负数：

$0-(+a)=-a \qquad (a>0)$

负数没有与它对减的数，则为正数：

$0-(-a)=+a \qquad (a>0)$

后 4 句是加法法则，

$(\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b) \qquad (a>b>0)$

$(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b) \qquad (a\geqslant b>0)$

$(\pm a)+(\mp b)=\mp(b-a) \qquad (b\geqslant a>0)$

$0+(+a)=+a \qquad (a>0)$

$0+(-a)=-a \qquad (a>0)$

刘徽所概括、归纳的正负数加减法则，跟现在课本上的法则：同号两数相加，绝对值相加，符号跟加数相同；异号两数相加，绝对值相减，符号跟绝对值大的相同；减去一个数，等于加上这个数的反数，是完全吻合的。

中国人对负数的认识，起源于 1 世纪。不仅比欧洲人早，也比印度人早。印度开始使用负数的年代比中国晚七八百年，直到 630 年数学家婆罗摩笈多才开始使用负数，他用标在数字上的小点或圆圈来表现负数。在欧洲，负数的第一次出现，是在希腊数学家丢番图(246—330)写的一本书中，他在解一个方程的时候，偶然地引进了负数。但不久就被作为荒谬的东西而放弃了。这是多么可惜的事情啊！欧洲论及负数的著作是卡尔达诺在 1545 年出版的《大术》，确认了他在解各种方程时得到了负数，并简明扼要地叙述了负数计算法则。相比之下，中国古代数学家对负数的认识不仅早，而且正确、深刻。

等间距二次内插法

隋朝天文学家刘焯(zhuō),在数学上也造诣颇深。他在编制历法《皇极历》时,创造性地应用了等间距二次内插法,从而取得了重大突破,夺得世界古代数学史的一块"金牌"。

刘焯(544—610)自幼饱览群书,博学善辩。开皇六年(586年),他在辩论洛阳石经上的名迹时责难群儒,因而遭谤被贬。但他才华横溢,并没有就此消沉下去,而是专门研究起天文来。

秦汉以前,我国古人把日、月的视运动看作是匀速运动,所以,一年二十四节气的间隔也看成是等距的。

随着天文观测的进步,东汉时已发现月球的视运动速度是随时间的变化而变化的;南北朝时期又发现了太阳和五星的视运动也不是匀速运动的。尤其是太阳视运动的不均匀性,对历法中计算合朔、交食的时刻有着较大的影响,这就必须用更精确的方法来计算它们。因此,刘焯在编制《皇极历》时,创造了等间距二次内插法。

刘焯在其《皇极历》中4次用到了等间距二次内插法,即推每日迟速数术,求月朔弦望应平会日所入迟速(术)、推朔弦望定日术和求月入交去日道(术)。

现以推每日迟速数术为例,来说明刘焯是怎样使用等间距二次内插法的。

这是一个已知两节气的朓降率和后一节气的迟速数,求此节气间每日的迟速数的问题。他把一年的时间分为24等分,每个分点上为一节气日,这就是所谓的等间距,但日行有快慢,所以用二

次内插法来计算。

其数学原理是：

设 $f(l)$ 为时间 t 的函数，l 为 T 时间内每个分段的时间，n 为正整数，$0 < s < l$。已知 $n = 1,2,3,\cdots$ 时，$f(nl)$ 的各个对应值，求 $f(nl + s)$ 的值。

设 $\triangle_1 = f(nl + l) - f(nl)$，$\triangle_2 = f(nl + 2l) - f(nl + l)$，这样，刘焯创立的内插公式相当于：

$$f(nl + s) = f(nl) + \frac{s}{l} \cdot \frac{\triangle_1 + \triangle_2}{2} + \frac{s}{l}(\triangle_1 - \triangle_2) - \frac{s^2}{2l^2}(\triangle_1 - \triangle_2)$$

求太阳的视行度数时，l 为一个节气的时间；求月亮的视行度数时，l 为一日的时间。

利用这个内插公式，就可以推算出日、月、五星的视行度数。

当 $l = 1$ 时，上述公式可简化为：

$$f(n + s) = f(n) + s \cdot \frac{\triangle_1 + \triangle_2}{2} + s(\triangle_1 - \triangle_2) - \frac{s^2}{2}(\triangle_1 - \triangle_2)$$

如果在 $t = nl$ 到 $t = nl + s^2$ 的时间内，太阳、月球或五星的视运动是等加速（或等减速）的，则 $f(t)$ 是一个二次函数，上述公式在理论上是正确的。不过，实际情况要复杂得多。所以刘焯的二次内插公式只能得出 $f(t)$ 的近似值，这是因为二十四节气并不是等间距离的。

刘焯创立的二次内插法，无论是在天文学史上还是在数学史上，都是极为重要的，它在当时世界上居于领先地位。印度数学家、天文学家婆罗摩笈多于公元 628 年使用了等间距二次内插法。中亚著名学者阿尔·华鲁尼也用等间距二次内插法计算正弦值和正切值。在欧洲到 17 世纪才在天文学等方面使用内插法进行计

算。这些同刘焯相比,其差距是显而易见的。

有的学者强调指出:内插法的使用,使得用多项式逼近各种复杂的函数成为可能,在理论上具有重大的价值,现已成为数值分析的核心内容之一,刘焯的功绩更在于此。

张燧内插法公式

我国唐朝中期著名的天文学家和数学家张燧，在数学研究方面取得了引人注目的成就，他所创造的不等间距二次内插法，至今仍在世界数学史的长卷上，闪耀着智慧的光华。



张燧（683—727）小时候就非常喜欢读书学习，尤其喜欢研究天文和数学。到了青年时代，他的求知欲更强了。

当时，长安城外有个元都观，里面藏着许多好书，观里还有一个很有学问的道士尹崇。张燧经常向他请教，并如饥似渴地读观里的藏书。

有一次，张燧从尹崇那里借了一部西汉扬雄写的《太玄经》。这是一部很深奥的哲学著作，其中也讲到许多自然科学知识。张燧借后没几天，就去还书了，并把自己的读书笔记交给尹崇。

尹崇看后，大为惊奇，赞不绝口。于是，张燧作为一名青年学者，名声很快就在长安城中传开了。

张燧成名后，引起了王公贵族的注意。女皇武则天的侄子武三思派人来拉拢张燧，想借此提高自己的声望。张燧为人耿直，淡泊功名，不愿与皇室来往，但又怕遭到迫害，就出家当了和尚，取名一行。

此后，一行常常云游全国名寺。他曾步行数千里到浙江天台

山国清寺去请教数学，到湖北当阳玉泉山，钻研天文。就这样，经过勤奋学习，他在天文、数学方面均有了更深的造诣，成为国内知名的学者。

唐玄宗继位后，旧历书误差太大，连日食都预报不准，就下旨召一行入京，撰新历。一行历经 10 年，终于在 727 年完成了更精确的新历《大衍历》。唐朝用大衍历 28 年后，日本也采用了。

为制定《大衍历》，一行对数学进行了大量的研究，创造并使用了不等间距二次内插法。克服了刘焯内插公式只能用于等间距的局限性，将内插法的研究推进了一步，从而也避免了较大的误差。

一行内插法的数学方法是：

设 $f(t)$ 是时间 t 的函数，$l_1 \neq l_2$，$0 < s < l_1$，已知 $f(a)$、$f(a+l_1)$、$f(a+l_1+l_2)$ 的各个对应值，求 $f(a+s)$ 的值。

设 $\Delta_1 = f(a+l_1) - f(a)$

$\Delta_2 = f(a+l_1+l_2) - f(a+l_1)$

那么一行创立的内插公式相当于：

$$f(a+s) = f(a) + s\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{l_1 + l_2} + s\left(\frac{\Delta_1}{l_1} - \frac{\Delta_2}{l_2}\right) - \frac{s^2}{l_1 + l_2}\left(\frac{\Delta_1}{l_1} - \frac{\Delta_2}{l_2}\right)$$

当 $l_1 = l_2$ 时，上述公式便和刘焯的等间距二次内插公式相同。

《大衍历》中还有其他一些数学成就，主要有三次差分、等差级数求和、二次方程 $x^2 + bx + c = 0(b > 0, c > 0)$ 的求根公式等。

一行一生勤奋好学，从不盲从，是我国古代的实践型数学家，他的创造性成就与精神品格，永远值得后人称颂和学习。

张燧的不等间距二次内插公式，被世界数学界公称为"张燧内插法公式"。这个内插法公式比牛顿于 1670 年公布类似的内插法公式早 1000 多年。

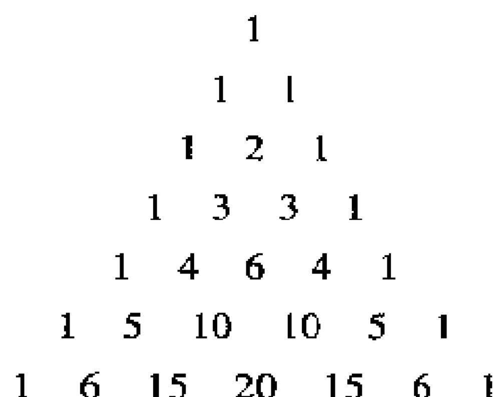
贾宪三角

在初等数学中，将二项式乘方展成一个多项式，是一种最基本的运算。二项式展开式的系数，有一定的规律。现代数学教科书中用组合数公式 C_n^r（n 是二项式乘方次数，$r = 0,1,2,\cdots,n$）表示，古代是用一个图表示。只要掌握住这种规律，就可以直接把各项写出来。

那么，世界上是谁首先发现这一规律的呢？

是中国北宋时期的数学家——贾宪。

贾宪把二项式展开式的系数造了一个表，叫“开方作法本源图”。它以宝塔状的形式，将指数为 0 到 6 的二项式展开式的系数一一列出如下图：



开方作法本源图被称为贾宪三角。

从上面的图形中，我们不难发现，这个三角形的两条斜边都是由数字 1 组成的，而其余的数都等于它肩上的两数的和，例如 $2 = 1 + 1$，$3 = 1 + 2$，$4 = 1 + 3$，$6 = 3 + 3$，… 其实，贾宪三角正是按照这一规律做成的。

利用这个三角形，我们就可以把任意一个二项式的幂展开。

例如：　$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

………………　………………

$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

这里$(a+b)^3$展开后的系数1,3,3,1就是贾宪三角第四行的数字。

贾宪三角在数学上是一个重大突破。不知你是否发现，贾宪三角若从不同角度去看，更是妙趣横生。横看：把各行的数分别加起来，从第一行起，依次得到的和是1,2,4,8,16,… 恰恰是$2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,\cdots$

如果把贾宪三角变换一下形式：

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

竖看：第一列，都是1；第二列，是自然数列；第三列，是三角形数数列。

斜看：将其中各斜线上的数相加，和分别是1,1,2,3,5,8,…这不正是著名的斐波那契数列吗！

难怪有人这样说：贾宪三角"横看成岭，侧看成峰"，实在是奥妙无穷。

贾宪三角对后世影响很大，明清许多数学著作都引用了它。

世界上，最早发现二项式展开式系数之间的规律者，还有德国

天文学家亚披纳斯特，他于1527年著书，介绍二项式展开式系数图，这比贾宪晚了500多年。

贾宪三角这一重大数学成果，在中国出现600多年后，才有法国数学家、物理学家帕斯卡（1623—1662）在1654年得出这个表，欧洲人称它为“帕斯卡三角形”，比贾宪晚了600多年。

隙积术和会圆术

宋代是我国古代科学技术发展的黄金时代。在那个时期，涌现出一大批科学人才，沈括则是他们中的一个最杰出的代表。

沈括(1031—1095)博学多才，成就卓著，在天文、地理、数学、物理、化学、生物、医药以及水利、军事、文学、音乐等方面都有独到的见解。他晚年著有《梦溪笔谈》，记载了劳动人民在科学技术方面的卓越贡献和他自己的研究成果，反映了我国古代，特别是北宋时期自然科学所取得的辉煌成就。

沈括在数学上的贡献，主要是对隙积术和会圆术的发明。



什么是隙积术呢？

在日常生活中，人们常常会看到酒店和陶器店中，用瓮、缸、瓦盆之类的物品堆积成一种长方台形体，底层排成一个长方阵，以上逐层长宽各减一个。这种堆积物之间有一定的空隙，当时人们叫“隙积”。

沈括对隙积问题很感兴趣，决心解决求隙积的问题。为此，他走访各个酒店和陶器店，认真观察隙积的排列，分析隙积的特征。在这个基础上，他又反复研究前人的求积法，终于发明了隙积术。

沈括的隙积术用现代数学可表示为：

$$V = \frac{n}{b}[a(2b+B)+A(2B+b)+(B-b)]$$

其中，a、b 分别为顶层的宽和长；A、B 分别为底层的宽和长，n 为层次。

这一公式是如何求得的，沈括没有推算，但从他对隙积的分析可知，他是运用了高阶等差级数求和的方法，即两串连续整数各相当项乘积的和。

上述公式的由来就是：$ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots+(A-1)(B-1)+AB$（共 n 项）

沈括的这一成就，从数学史上看，主要不在于他给出了隙积的体积，而在于给出了依次堆成长方台形物体的总个数的求和公式。此公式开了中国垛积术研究的先河，在这以后，南宋的杨辉和元代的朱世杰都对这一问题进行了进一步的研究。到 19 世纪，在此基础上产生了李善兰的"恒等式"和"尖锥术"等一系列优秀成果。

所以清朝顾观光曾说："垛积术详于杨氏、朱氏二书，而创始之功，断推沈括。"

下面再了解一下会圆术。

会圆术给出了弓形的弦、矢和弧长之间的近似关系，是沈括的又一杰出创造。《九章算术》曾给出弓形的弦与矢求其面积及圆直径的方法，但没有进一步考虑求其弧长的问题。在中国，这一问题的研究是由沈括开始的。

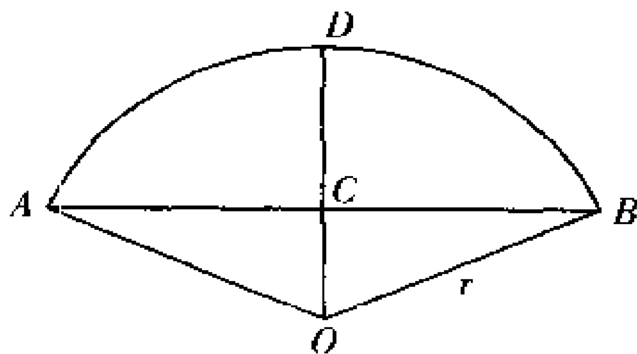
会圆术用现在的表示方法是：

设在弓形中弦 $AB=c$，矢 $CD=q$，弧 $\overset{\frown}{ADB}=S$，则有

$$c=2\sqrt{r^2-(r-q)^2},$$

$$S=c+\frac{2q^2}{d}$$

其中，$d=2r$ 为圆的直径。



这一公式在圆心角不超过 45° 时，所得弧长的相对误差小于 2%，精确度是相当高的。

沈括还指出："凡圆田，既能拆之，须使会之复圆。"提出了用整体复原来检查局部分割的原则，思想是深刻的。会圆术的名称也正是由此而来。

后来元代王恂、郭守敬等人，编制《授时历》时，多次反复地使用了会圆术，并配合使用了相似三角形各线段间的比例关系，从而在推算赤道积度、赤道内外度方面创立了一个新方法。从数学意义上讲，新的方法相当于开辟了通往球三角法的途径。

沈括的科研成果，受到了世界上众多现代科学家的好评和推崇。

日本数学家三上义夫对照比较了各国优秀的数学家后说："日本的数学家没有一个比得上沈括，像中根元圭精于医学、音乐和历术，但没有沈括的经世之才，本多利明精航海术，有经世之才，但不能像沈括那样多才多艺…… 沈括这样的人物，在全世界数学史找不到，惟有中国出了这个人。我把沈括称做中国数学家的模范人物或理想人物，是很恰当的。"

李约瑟博士在他的《中国科学技术史》一书中认为："沈括可算是中国整部科学史中最卓越的人物。"

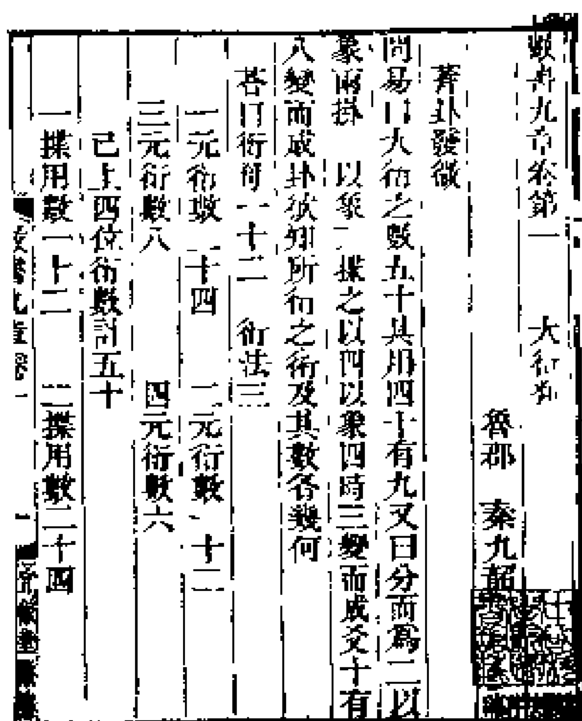
美国科学史家席文博士，称沈括是"中国科学与工程史上最多才多艺的人物之一"。

《数学九章》

秦九韶是南宋数学家，我国宋元数学四大名家（秦九韶、李冶、杨辉、朱世杰）之一，以《数学九章》闻名于世。其中“正负开方术”（高次方程数值解法）和“大衍求一术”（一次同余式组解法）都达到了当时世界数学的最高水平。

秦九韶（约 1202—1261）知识渊博，当时人们评论他：“性极机，星象、音律、算术以至营造等事无不精究”，是一个无所不能的全才。

秦九韶在饱受兵火生活不能安宁的十几年中，深深体会到数量关系在社会中所起的作用，因而注意搜集生产、生活、交换以及战争中的数学问题，以解决实际困难。经过勤奋不辍（chuò）的努力，他终于在 1247 年完成了数学杰作《数书九章》。明清称为《数学九章》。


数书九章卷第一　大衍類
魯郡　秦九韶
蓍卦發微
問易曰大衍之數五十其用四十有九又曰分而爲二以
象兩掛一以象三揲之以四以象四時三變而成爻十有
八變而成卦欲知所衍之術及其數各幾何
答曰衍母一十二　衍法三
一元衍數二十四　二元衍數一十二
三元衍數八　四元衍數六
已上四位衍數計五十
一揲用數一十二　二揲用數二十四

《数学九章》书影

《数学九章》全书共 18 卷，81 题，分为几大类。

第一，大衍类，集中阐述了他的重要成就——大衍求一术，即一次同余式组解法，并介绍了相应的通解公式。秦九韶的方法分两个层次。对于各同余式

的模数两两互素的情形，需要求出与模数相应的一组乘率，计算乘率的方法称为"大衍求一术"。即当今泛指的一次同余式组解法。基本计算程序，就是所谓"定数"和"奇数"的辗转相除，当余数为1时，即可得到所求乘率。因为最后一步都出现余数1，所以称为"求一术"。同时，他还针对不同的情况，提出不同的程序。他还把这种理论用于解决商功、利息、粟米和建筑等问题。

第二，天时类，是有关历法推算及降雨降雪量的测量。

第三，田域类，是面积问题。

第四，测望类，是勾股重差问题。

第五，赋役类，是均输及租税问题。

第六，钱谷类，是粮谷转运和仓库容积问题。

第七，营建类，是建筑工程问题。

第八，军旅类，是营盘布置及军需供应问题。

第九，市易类，是交易及利息问题。

其中后八类问题都是按应用分类。尤为突出的成就是正负开方术，现在称为"秦九韶程序"，即以增乘开方法为主导求高次方程正根的方法。他用这种方法解决了21个问题，共26个方程，其中二次方程20个，三次方程1个，四次方程4个，还用勾股差率列出了1个十次方程。在这里，秦九韶把贾宪开创的增乘开方法发展到十分完备的地步。在开方中，他又发展了刘徽开方不尽求微数的思想，在数学史上第一次用十进小数表示无理根的近似值。

《数学九章》中的大衍求一术跟高次方程数值解法一样，简捷、明确，带有很强的机械性，其程序可以毫无困难地转化为算法语言，用计算机来实现。

秦九韶对于一次同余式组的解法，在理论上及算法上都是正确的。在西方，最早涉及一次同余式的是意大利数学家斐波那契，他在《算盘书》(1202年)中看出了两个一次同余式问题，但没有

一般解法。德国数学家高斯，于1801年，将一次同余式组的解法发表在他的《算木研究》里，比秦九韶晚了500多年。

目前，一些数学教科书已将秦九韶高次方程的数值解法，明确称为"秦九韶程序"，以代替过去西方沿用的"霍纳法"名称。因为秦九韶的程序演算步骤，要比英国数学家霍纳1819年提出的类似方法早500多年。

美国著名科学史家萨顿对秦九韶评价说："他是他那个民族，他那个时代，并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一。"

《缉古算经》

6世纪下半叶至7世纪上半叶，中国数坛上活跃着一位非凡的人物，他就是大名鼎鼎的王孝通。

王孝通出身于平民家庭，从少年时代就开始学习天文历法和数学，并终生从事研究工作。他在唐朝初年为历算博士，后来升为太史丞。

王孝通的主要贡献是撰写了《缉古算经》。它是现存最早，也是最系统地研究三次方程的著作。

起初，他的著作名为《缉古算术》，约完成于唐武德九年(627年)之前，显庆元年(656年)国子监开设算学馆，其书被列为教科书之一，遂改称为《缉古算经》。全书1卷，共20个题目。

《缉古算经》中，第1题是关于天文历法的计算问题，用算术方法解答。第2至第14题是关于土木工程中的体积与长度，第15至20题是勾股问题。这20题中有一部分涉及三次方程及双二次方程。书中每问之后都有术文，主要说明三次或双二次方程各项系数的算法。同时，在一些重要的术文之后，附有王孝通的自注，一般都是说明立术或建立方程的理论根据及其运算过程。

在古代，由于缺乏一套简便有效的代数符号，要由实际问题列出高次代数方程相当困难。

然而，王孝通由实际问题的几何意义出发，经过一系列推导而确定方程的各项系数。因而每一项都有显而易见的几何背景。在推导过程中，他使用了复杂的几何公式，勾股恒等式与代数恒等变形等，表现出高超的运算技巧与推理能力。

王孝通的《缉古算经》标志着中国古代在代数学方面登上了一个新的阶梯。后来的中国数学家沿着它不断攀登，发展了中国古代高次方程的数值解法，到金元时代则发展为举世闻名的"天元术"和"四元术"。因而《缉古算经》的学术价值不能低估。

《缉古算经》中的三次方程解法，特别是其中所讲述的用几何方法列三次方程解实际应用问题。是一个辉煌成就。这不仅是中国现存典籍中的最早记述，在世界数学史上也是关于三次方程数值解法及其应用系统论述的最古老的著作。

古希腊门内马斯遇到过三次方程 $x^3 = 2a^3$，他是用圆锥曲线来求解的。阿基米得也用类似的方法解过三次方程问题。

10 世纪，阿拉伯人发展了三次方程的几何解法，至 13 世纪斐波那契才得到一个三次方程的数值解，这已落后于王孝通 600 多年。

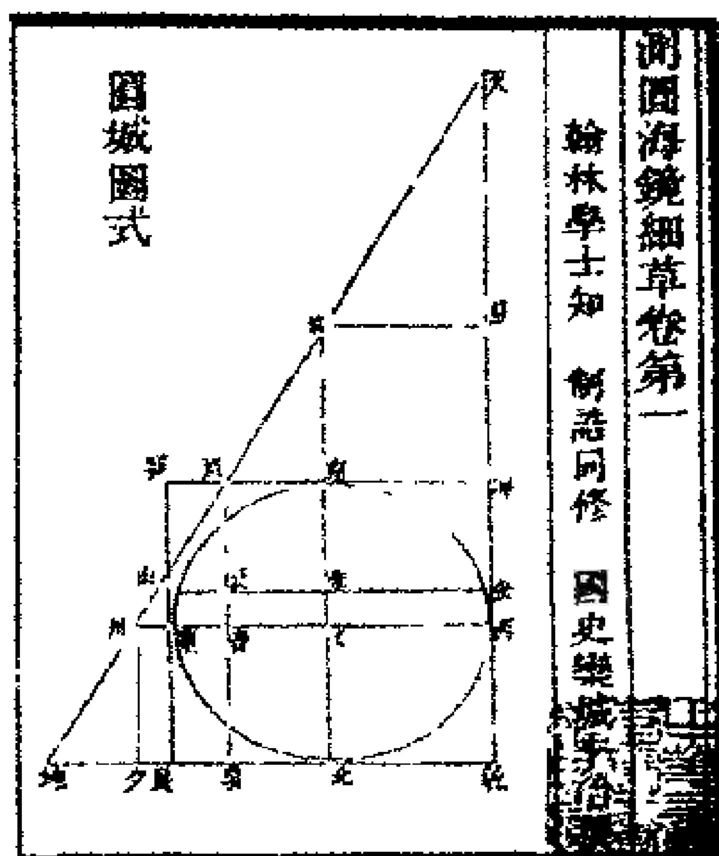
至于一般三次方程的代数解法直到 16 世纪才出现在意大利人的著作中，就此不难看出王孝通的超世才智。

天元术

设未知数列方程，今天对具备初等数学知识的人来说，已是轻车熟路，然而，在天元术产生以前却是非同小可。而这一问题的真正解决，则是我国数学家李冶。

李冶（1192—1279）是我国宋元时期数学四大名家之一。据说李冶原来叫李治，后来发现与唐高宗同名，将“治”改为“冶”。

李冶出生于官宦世家，幼年聪颖，喜爱读书，尤嗜算术。在他看来，学问比财富更宝贵。他后来著书立说时，还曾引用“积财千万，不如薄技在身”的民谚，真是难能可贵。



《测圆海镜》书影

李冶的数学成就，主要是在天元术上。

什么是天元术呢？

用现在的话来说，它就是代数学中根据实际问题所给出的已知条件列出方程的一种方法。

天元，就是问题中的

未知数符号 x,"立天元为某某"就是"设 x 为某某"。这种只以一个文字"元"来表示方程中未知数,从而列出简明的数学方程的方法,是我国古代劳动人民的一个伟大创造。

起初,天元术是在金末元初形成于河北、山西一带,由北方的数学家蒋周、李文一、石信道、刘汝谐、元裕等人创造的。不过,当时的天元术还不成熟,表达方式也很繁琐。

对此,李冶经过刻苦钻研,终于完善了天元术,于1248年撰成《测圆海镜》一书,提出了简捷明了的列方程程序:

首先,立天元一,这相当于设未知数 x。

其次,根据题意列出一个天元等式(含有未知数的多项式或分式)和与之等值的另一"等式"(多项式和分式)。

最后,把二式连为等式,通过相消,化成标准的天元开方式,即得含未知数的一元高次方程,相当于:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

对于多个未知数,则分别称为"天元"、"地元"、"人元"、"物元",相当于我们今天所给的未知数 x、y、z、u。

同时,李冶还用"天、上、高……"等表示 x、x^2、x^3…用"地、下、低……"等表示 $\frac{1}{x}(x^{-1})$、$\frac{1}{x^2}(x^{-2})$、$\frac{1}{x^3}(x^{-3})$…

李冶在他所著的《测圆海镜》和《益古演段》中对天元术进行了精辟的论述,他突破了前人对一元方程系数和常数项的正负号限制。他的数学著作,是宋元时期数学领域的一大宝贵遗产。

天元术是中国独特的半符号代数学,在世界数学史上占有重要地位。它的创造,使未知数和方程的表达大为简化,列方程的思维过程的叙述也大大精练。不仅在应用上大为方便,而且重要的是为数学的进一步发展打下了基础。

天元术其水平之高,超过了同时期代数学最为发达的印

度和阿拉伯。至于欧洲，到16世纪后半叶才有韦达引进字母符号代表方程中的未知数。然而，这比起天元术已迟了300多年。

影响深远的“纵横图”

纵横图，又称幻方或魔方，世界学术界一致公认：最早的纵横图起源于中国。而中国在幻方研究上成绩最突出的应当首推宋元数学四大名家之一的杨辉。

纵横图，它是将从 1 到 n^2 的自然数排列成纵横各有 n 个数的正方形，使同一行、同一列或同一对角线上的 n 个数的和都等于 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$。这样的排列就为 n 阶的纵横图，亦称 n 阶幻方。

纵横图在我国的流传相当久远。

据记载，我国的汉代就已有三行的纵横图，称为九宫。与九宫相联系的还有一个传说故事哩：

相传，大禹治水时，洛水（在今洛阳附近）里浮出一只大乌龟。龟背上有奇怪的花纹。当时人们认为这龟纹里蕴含着治理国家的道理，所以，把它称为“洛书”。今天看来，“洛书”只不过是一个三阶方阵，或称三阶魔方、三阶幻方。不信，请看下图：

4	9	2
3	5	7
8	1	6

只要认真观察便可发现，此图有很多奇妙之处：

纵 3 列的 3 个数的和各是 15，

横3行的3个数的和各是15，

两对角线上3个数的和各是15。

这多么富有情趣呀！

杨辉一生酷爱数学、对社会上流传的通俗数学尤感兴趣，简直被纵横图迷住了，他在揭示了九宫的奥妙后，又经过孜孜不倦的努力，系统地研究了：

四四图（四阶方阵、四阶幻方、四阶魔方）；

五五图（五阶方阵、五阶幻方、五阶魔方）；

……

九九图（九阶方阵、九阶幻方、九阶魔方）；

百子图（十阶方阵、十阶幻方、十阶魔方）。

现在，我们不妨再看一下杨辉的百子图：

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

经过认真计算，我们不难发现各行各列的数字之和都是505。

杨辉的纵横图对后世的影响很大，明清两朝代中的许多算家

对纵横图争相研究，王文素、程大位、方中通等都取得了非凡的成就。

纵横图对世界数学的发展也有深远的影响。

洛书最先走出中国传到印度，在印度被认为是吉祥的象征。至今，还有许多印度少女把洛书的图样佩在胸前作为护身符。

15世纪，住在君士坦丁堡的摩索普拉把中国的纵横图介绍到欧洲，被取名为“幻方”。

直到今天，纵横图仍有其强大的生命力，它在程序设计、图论、人工智能、对策论等现代高等数学方面都有着广泛的应用前景。电子计算机技术的迅速发展，将给古老的题材注入新鲜血液。

《算学启蒙》和《四元玉鉴》

朱世杰是我国宋元时期数学四大名家之一。他著有《算学启蒙》和《四元玉鉴》。而其中的四元术和垛积招差术则是具有当时世界领先水平的数学成就。他也因此而被后人称为四元术大师。

元朝统一中国后，为南北之间的学术交流提供了有利条件。朱世杰开始了历时20多年之久的游学生涯。南方数学在改进乘除捷法和筹算歌诀方面的成就给他以很大的启发。他结合自己20多年研究数学的心得，于1299年写出了一部启蒙算术著作《算学启蒙》。

《算学启蒙》全书共3卷20门59个问题，从简单的四则运算入手，逐步深入，直至高次开方、天元术等较高深的内容，形成了比较完整的体系，是当时一部较好的数学启蒙书。在全书之首，朱世杰列出各种常用数据、基本运算法则、歌诀等共18条。令人佩服的是，其中的归除歌诀与后世珠算所用歌诀完全相同；所列出的正负数乘除法法则，在中国数学史上也是首次出现的。

《算学启蒙》继承了《九章算术》以来中国古代数学的传统，书中提出的问题大都与当时社会的实际生活有关，对元代的社会史、经济史的研究，具有一定的参考价值。

朱世杰在完成《算学启蒙》4年之后，即1303年，又完成了自己的另一部力作——《四元玉鉴》。

《四元玉鉴》全书共分3卷24门288问。书中所有问题都与求解方程或方程组有关，其中"四元术"——多元高次方程组的解法，即是全书的主要成就之一。

朱世杰把“天元术”推广为“四元术”，即利用天、地、人、物四元表示四个未知数，建立四元高次联立方程组，并举例说明建立四元高次方程组和消元的方法。

四元术用四元消去法解题，把四元四式消去一元变成三元三式，再消去一元变成二元二式，再消去一元，就得到一个只含一元的天元开方式，然后用增乘开方法求得正根。这和今天的解方程组的方法基本一致。

四元式的运算，出现了关于多项式的运算，这是中国也是世界数学史上最早出现的关于多项式的运算。

四元术还涉及到多元高次方程组的解法，也是世界上最早的多元高次方程组的解法。

可见，朱世杰的名著《算学启蒙》和《四元玉鉴》是中国古代数学发展进程中的一个重要里程碑，是中国古代数学的一份宝贵遗产，也是世界数学史上一颗璀璨的明珠。

《算学启蒙》出版后不久，便流传到朝鲜和日本。在朝鲜被作为李朝选仕(算官)的基本书籍之一，在日本直到17世纪仍为各种注释、谚解的数学经典。

在《四元玉鉴》招差术方法中，朱世杰列出的招差公式，在欧洲，直到1670年才由数学家格里高里加以说明。1676年，牛顿的著作中才出现“招差术”的一般公式，要比朱世杰的研究成果晚300多年。

同样，朱世杰在把多元高次方程化为一元高次方程时所使用的消元法，在欧洲，直到1779年才由法国数学家贝祖得出，这比朱世杰已晚了400多年。

萨顿评价说：“朱世杰是他所生存时代的、同时也是贯穿古今的一位最杰出的数学家，而他所著的《四元玉鉴》则是中国数学著作中最重要的一部，同时也是中世纪最杰出的数学著作之一。”

第五大发明——算盘

提到中国的四大发明，是无人不知，无人不晓。珠算是中国的第五大发明，大概你还不知道吧？

19世纪中期，中国沦为半封建半殖民地社会，许多外国传教士来中国传教，兴办学校。他们傲慢无礼，不把中国人放在眼里，认为中国人愚昧无知，不懂数学，计算工具也很落后。

那时山东青州有一个走乡串户的风水先生王万相。他自幼酷爱数学，家中藏有许多中国古算经和天文书籍，如《历家考程》等。王万相对洋人的傲慢无礼非常气愤，很想找机会杀杀洋人的威风，长长国人的志气。

一天，王万相来到了青州城，找到一位赫赫有名的美国教授狄考文。狄考文识天文，晓地理，精通高等数学。他一向看不起中华民族的灿烂文化。

两人商定，比赛题目是：推算历法中日蚀和月蚀的出现日期。

比赛一开始，王老先生从背袋中拿出3个大算盘，把它们连在一起，然后，灵巧地拨动着算盘珠，劈里啪啦，几分钟就丝毫不差地算出了结果。

再看狄考文，手忙脚乱，满头大汗，一张纸一张纸地用代数式演算着，算了大半天，演算纸摞了一大垛，才勉强得到一个答案。通过比赛，王万相不仅为中国人争了口气，同时，也显示了珠算的神奇威力。

中国是珠算的故乡。但是由于战乱，最早的珠算书没有流传下来，创造算盘的年代也很难确定。据史料记载，汉代，我国便有

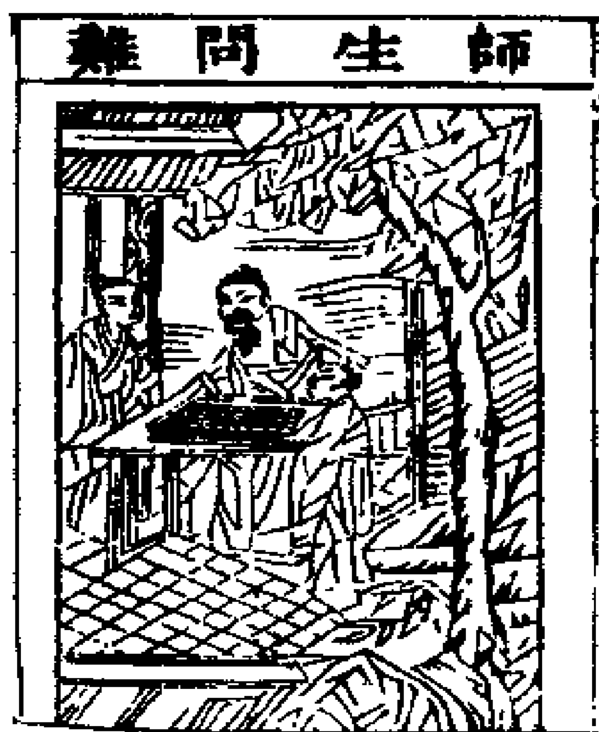
了算盘的雏形。唐宋时期，进化为穿档的有横梁的算盘。



程大位

在元朝末年陶宗义著的《南村辍耕录》中，最早提到了算盘珠一词，并说“拨之则动”。这证明了早在元朝末年，算盘已在我国江苏、浙江一带流行了。

明代，程大位经过20多年的刻苦钻研，于1592年终于出版了《算法统宗》17卷。书中介绍了算盘的式样，详细地记述了珠算定位方法，珠算加减乘除四则运算方法，以及用来指导拨珠的珠算口诀，这些口诀至今还在沿用。

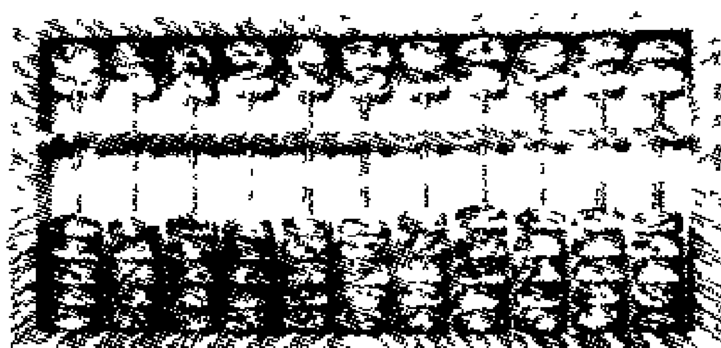


《算法统宗》书影

珠算对于实用数学的普及具有相当重要的作用，是古代最先进的计算工具和计算方法，对世界的文明进步起到了重大作用。

相传，日本毛利重能到中国学数学，把《算法统宗》带到日本。现在日本山田市的博物馆中还保存着一把算盘，它的匣盖上刻着“文安元子年”，这相当于我国明代正统九年（1444年），说明在明朝初年珠算就由中国传到了日本。日本珠算名著《尘劫记》的作者吉田光由自称该书

依据程大位的书。随后在日本便出现了上一下五的棱珠算盘，一直沿用到今。



乾隆算盘

珠算的故乡在中国，被誉为“科学之父”的美国学者萨顿认为，珠算是中国人独立创造的。

李约瑟指出：“直到近代还继续使用珠算的俄国人，也认为它起原于中国。在17、18世纪的欧洲，中国式的算盘引起了人们浓厚的兴趣。”

日本《珠算大事典》也写道：“我们今天所使用的算盘，是中国人所发明的，这一点几乎是确定的事实。”

近年来，美国、日本的学者把珠算誉为中国的第五大发明。在电子计算机技术迅速发展的今天，珠算在美国仍被作为“新文化”引进；在墨西哥还出现了“珠算博士”；太平洋上的岛国汤加的国王，亲自向国民传授珠算，更成为一时的美谈。

举世闻名的杰作——《视学》

视学，即数学中的画法几何学，在我国数学园地中，最早耕耘这方热土的，是清代的数学家——年希尧。

年希尧（？—1739）青年时代，就对工程图学怀有浓厚的兴趣。后来，他在北京供职，恰逢意大利画家郎世宁用欧洲透视画法为皇宫作画。年希尧同郎世宁结识后，便向他学习透视技术，受益匪浅。经过研究，年希尧掌握了其数学原理，于1729年出版了《视学》一书。

不过，他对《视学》仍不满足，嫌其疏漏不精。这样，又经过几年的努力，对初版《视学》做了修订和扩充，于1735年出版了修订本。这是我国第一部有关透视与画法几何学的著作。

《视学》书中，例图多为中国和西方建筑物与器具等图样。所制诸图均按投影原理绘制。

透视图是用中心投影法所做的一种单面投影，设在人与建筑物之间立一铅垂面作为投影面，在透视投影中，这个投影面称做画面。投影中心即为人眼，在透视投影中称做视点。通过视点与建筑物上各点的连线称做视线。逐一求出各视线与画面的交点就是建筑物上各点的透视，然后，将各点的透视连接起来，即得建筑物的透视图。

透视图的一个显著特点是：形体距离观察者越近，所得透视投影越大；反之，距离越远则投影越小。年希尧绘制了大量精美的透视图，所用方法有量点法、双重点法、截距法、仰望法等。他还用正投影原理制图，即把物体用平行光线投影到平面上的制图法，论述

了二视图和三视图。这是画法几何学的要点。

《视学》是在西方透视学知识影响下完成的，但其中有不少工作是年希尧的独创。

工程制图在中国古代屡有出现，前后绵延达2000年之久。《视学》既是对中国制图方面的一次全面总结，又是一部中西合璧的作品。是中国第一部系统的图学专著。

就画法几何学来说，世界上推崇法国数学家蒙日（1746—1818）为画法几何学奠基人。蒙日于1799年出版了《画法几何学》，而中国于1729年即出版了年希尧的初版《视学》，又于1735年再版《视学》，较法国数学家蒙日早70年。

明氏新法

我国是一个多民族的大家庭，除了占全国人口约94%的汉族外，还有回、藏、蒙、满、壮、维吾尔等少数民族，他们都对祖国的灿烂文明做出了卓越的贡献。综观中华民族的历史长卷，可以发现其中有许多优秀的少数民族科学家，明安图就是其中一位典型代表。



明安图（？—1764），蒙古族人，1710年左右，被送到钦天监（相当于国家天文台）学习，主要学习天文、历法和数学。

当时，康熙皇帝经常在宫中举行各种科学活动，作为官学生的明安图时常有机会观摩和听讲。因为明安图学习刻苦，成绩出众，所以不仅受到康熙皇帝的器重，而且还很快结识了在宫中工作的一批著名学者，如陈厚耀、梅珏（jue）成、何国宗等。后来，明安图被正式分配到钦天监工作。

明安图在天文、数学方面造诣很深，参与过《律历渊源》、《历象考成后编》及《仪象考成》等大型丛书的编写工作。

康熙年间，明安图曾参加过两次大地测量工作。在绘制地图的工作中，由于经常要用到三角函数的计算，所以明安图对数学中无穷级数问题发生了浓厚的兴趣，并成了中国数学史上在这个领域中进行研究的第一个学者。

那么，什么叫无穷级数呢？

简单说来，就是用无穷多个较简单的算式的和来表示一个较复杂的数或数学关系的方法。

例如，我们熟知的圆周率 π，就可以用无穷多个自然数的四则运算表示出来：

$$\pi=3\left(1+\frac{1^2}{4\cdot 3!}+\frac{1^2\cdot 3^2}{4^2\cdot 5!}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4^2\cdot 7!}+\cdots\right)$$

这个式子的右边虽然没有穷尽，但我们不难根据前几项看出它的变化规律来。验算一下我们就会发现：右边的项数取得越多，结果就越接近 π，如果多到无穷项时（当然实际计算时是不可能的），其总和就等于 π。右边这个式子一级级累加起来，就像一个走不到头的阶梯一样，所以叫做无穷级数。

掌握了这个无穷级数，我们就可以不用再像刘徽那样，用割圆术的艰苦劳动去计算 π 值了。

可见，无穷级数是一个很有力的数学工具，它是微积分学里的一部分重要内容，在欧洲，也只是从 17 世纪开始才有人对此进行研究。

17 世纪，欧洲一些数学家提出了用解析方法计算圆周率的问题，列出了用无穷级数表示圆周率和三角函数的表达式。康熙末年，法国一个叫杜德美的传教士来我国，把西方数学家格里高里求圆周率、求正弦、求正矢的 3 个级数展开式介绍到中国来，梅文鼎的孙子梅瑴成把这 3 个公式翻译成汉语表达的形式，发表在自己的著作里。

然而，无论是杜德美本人，还是梅瑴成都没有对这 3 个公式的来源进行介绍。

于是明安图决心揭开这些公式的立法之源。

不过，这可不是一般的决心与行动，经过长达 30 多年的探索，他终于弄清了问题的答案。

1763 年，明安图写成《割圆密率捷法》初稿。书中不仅证明了杜德美的 3 个公式，而且创造性地提出了 6 个数学新公式，合并起来就是当时有名的“九术”。“九术”包括：求圆径密率捷法；求正弦捷法；求正矢捷法；弧背求通弦（就是弧所对应的弦长）法；通弦求弧背法；正弦求弧背法；正矢求弧背法；弧背求矢法；矢求弧背法。



《割圆密率捷法》书影

明安图首先从弧背求弦问题入手，逐步进行研究。他把任意一段圆弧分成若干分弧。寻找本弧通弦和分弧通弦的关系。他创造性地运用比例方法把几何图形的线段用代数形式表示出来，把我国古代数学的二等分弧法和西方的五等分弧法统一起来，并且加以推广，一直求到把弧分成一万等份，得出用万分之一弧的通弦来表示全弧通弦的级数展开式。

同时，在推导求证过程中，明安图运用并且发展了我国古代初步的极限概念。一方面，他认为弓形中弧是曲线，弦是直线，曲线和直线总是有区别的，即使无限地分割下去，“折之到无穷”，在极小的弓形中，弧也仍然是曲线，弦也仍然是直线，二者不能混同起来；另一方面又指出，对弧无限分割之后，弧和弦都变得极小而彼此接近，这样一来，就可以从中得出彼此相求的方法。

最后，明安图归纳得到已知弦长和圆半径求相对应的弧长的一般公式。

显然，他的研究成果大大超出了古代割圆术的范围。

令人遗憾的是，明安图于《割圆密率捷法》（4 卷）一书未能最后定稿就离开了人间。他的学生陈际新和儿子明新遵照遗嘱，对

它做了整理和校算，并于1774年定稿，1839年由数学家罗士琳和岑建功予以刊行。

今日观之，该书逻辑推理严密，思路清晰，方法严谨，在我国古代数学史上是罕见的。《割圆密率捷法》一共提出了9个基本方程，列出三角函数和反三角函数的幂级数表达式，并且计算出展开式的各项系数，为三角函数和反三角函数的解析研究开辟了新的途径。

明安图在数学研究上的这一丰硕成果，在我国数学史上占有重要的地位，清朝学者誉为“明氏新法”，他也因此被称为“弧矢不祧(tiāo)之祖”。

明安图在《割圆密率捷法》中所做的工作，在中国算学史上具有重要意义。无穷极数是微积分学的组成部分，在数学史上是从离散走向连续的桥梁。尤其是他倡导的科学思想，为数学家们开辟了一个广阔的天地。从此，数学开始了由离散、有限、常量的传统领域向无限、变量、连续领域过渡的艰难历程。

数学运算律

焦循是我国清代著名的哲学家和数学家。在中国古代数学史上，他第一次系统地提出了数量运算的基本规律，并以卓越的研究成就，推动了清代数学的发展。

焦循(1763—1820)，江苏甘泉(今扬州市)人。他出生在一个逐渐走向衰落的封建家庭，他的祖先曾拥有雄厚的家产，生活是相当宽裕的，后来家境不断破落，到焦循出世时，生活就比较艰难了。

艰难的日子，反而激发了焦循读书的热情，他夜以继日地刻苦学习。1787年，他开始外出教书度日。在杭州，他结识了著名数学家李锐，两人情投意合，共同切磋，互有启发。1801年，焦循考中了举人。后来，他帮助他人修纂(zuǎn)《扬州府志》，用所得酬金的一部分在扬州郊外买了五亩地和一栋楼。从此，焦循就开始了他的研究与著书生涯。随着学习的逐步深入与学识的逐渐丰富和精深，他写了多部数学、天文著作，成为有名的数学家，并与著名数学家汪莱、李锐并称为“谈天三友”。

焦循的研究涉及到宋元数学、球面三角学及椭圆等内容，但最突出的成就是他对刘徽注释的《九章算术》的探讨。他研究《九章算术》时力图抓住其“纲纪”，认为《九章算术》的总纲是加、减、乘、除四则运算，它们“可以通《九章》之穷”。他在1798年写的《加减乘除释》(共8卷)一书中，用甲、乙、丙、丁等字代替具体数字，从一般意义讨论运算规律。他掌握并且论述了算术运算律，如数的反身性、加法的结合律和交换律、乘法的结合律和交换律、乘法对加法的分配律等等。这在中国数学史上是一个创举，具有重要的

意义。

在《加减乘除释》中，焦循记述了以下关于算术的基本运算律："以甲加乙，或乙加甲，其和相等。"这句话用现代数学符号表示，如以 a、b 代甲、乙，则有：

$$a+b=b+a \text{（加法交换律）}$$

"以甲当甲，为适足" 即：

$$a=a \text{（反身性）}$$

由此得到两条定理：

"以甲加甲，为倍之" 即：

$$a+a=2a$$

"以甲减甲，为减尽" 即：

$$a-a=0$$

"若乙丙之差如甲乙之差，则以乙加乙，以丙加甲，或以乙减甲，以丙减乙其差皆平。" 若以 c 代表丙，即有：

若 $b-c=a-b$，则：

$$(b+b)-(a+c)=0,\ (a-b)-(b-c)=0$$

"减乙于甲而加丙，则甲少一丙乙之差；减丙于甲而加乙，则甲多一丙乙之差"，也即：

$$(a-b)+c=a-(b-c)$$

$$(a-c)+b=a+(b-c)$$

又"乘同于加，以甲加乙，以乙加甲，其数既等，则以甲乘乙，犹之以乙乘甲也"，即：

$$a\times b=b\times a \quad \text{（乘法交换律）}$$

"三数相乘为连乘，或先以甲乘丙，连以乙乘之，其得数皆等"，即：

$$(a\times b)\times c=(b\times c)\times a=(c\times a)\times b$$

这实际上已包含了乘法交换律和结合律两方面的内容。

焦循在《加减乘除释》中，用甲、乙、丙、丁等天干文字来表示数，与直接用具体的数字运算来表示某些运算规则相比，要更抽象化、一般化，这在中国数学史上也是一项创造。在这以前，中国古代数学家都以具体数字来说明某种运算规律，而焦循，是第一个使用了某些抽象符号，来表示一些数学运算规律。而且，这与今天我们使用 a、b、c、d 等拉丁字母，来表示一些数学运算规律是相同的。所以，从某种意义上说，焦循是中国传统数学与世界现代数学接轨的桥梁式人物。

致力于幂级数的研究

在我国数学史中，是谁在三角函数及函数的幂级数的展开式方面的研究取得了可喜的成果？又是谁第一个提出求椭圆周长的正确方法？他就是清朝著名的数学家项名达。

项名达(1789—1850)，幼年时便受到良好的教育，兴趣广泛，尤其爱好数学。1816 年他中举人，为国子监学正，1826 年中进士。

他在应考进士期间，曾在北京逗留数年，与著名数学家李锐的弟子黎应南共同研讨数学。相互的学习与交流，更加激发了他对数学的热情，返乡后，他专心研究起数学来。

1825 年，项名达撰成《勾股六术》。书中讨论了直角三角形的勾、股、弦各边互求的方法，分为术解和图解两大部分。他在前人研究成果的基础上，进行比较研究，从而加以变通，将主题相同的并归为一类，共列出 6 术，并一一作图详释。

1843 年，他又撰成《三角和较术》，该书内容涉及平三角和较相求、正弦三角和较相交、斜弧三角和较相求等问题。其语言论证极其巧妙，当代研究中国数学史的专家李俨对此曾作过高度评价说："自三角术输入，中算家乃知角度的应用，而说过此义最精的，当数罗士琳、项名达。"

1845 年，项名达与著名数学家戴煦结交。两人一见如故，共同研究数学，并互有启发，相得益彰。

这年，戴煦先完成《对数简法》(2 卷)，项名达则撰成《开诸乘方捷法》一书。两书相比较：戴煦找到了开平方的简便算法，而后者则为开任何高次方找到了比较简捷的方法。

同时,项名达还与戴煦共同讨论了求二项式 n 次根的简法,在《开诸乘方捷法》中创立逐项逼近法以及用来开 n 次方的递推方式。

还有,项名达提出了幂指数为 $\frac{1}{n}$ 的二项式定理,戴煦后来在此基础上发现了有理数指数幂二项式定理。

项名达还在戴煦研究成果的基础上,推而广之;反过来,这又促进了戴煦对方程论和对数论的研究。戴煦于 1846 年撰成《续对数简法》,列出了对数函数的幂级数展开式。项名达与戴煦对函数的幂级数展开式研究所做出的贡献,在中国数学史上占有重要地位。而两位数学家推诚相见,通力合作的大家风范,在中国近代科学技术史上更是被传为佳话。

项名达的晚年,写出了另一部重要著作《象数一原》,成功地解决了董祐诚弦矢公式推导中的堆积何以有倍分无析分,倍分中弦率又何以有奇分无偶分等问题。

在该书里,项名达主要构造了一类数表

$$N_k^p = \frac{u\ p}{n^p\ p!}$$

并给出斜右积、斜左积、直下积、直斥积四项证明方法,从而推广了数学家明安图的研究成果。

项名达的另一项突出成就,是他求出了椭圆周长的公式:

$$P = 2\pi a\left(1 - \frac{1}{2^2}e^2 - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4^2}e^4 - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6^2}e^6 - \cdots\right)$$

式中 P 为椭圆周长,e 为椭圆离心率,$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$,$a$ 和 b 分别为椭圆的半长轴和半短轴。

这一成绩的取得,是中国在二次曲线研究方面最早的重要成果,也是中国数学家第一次提出求椭圆周长的正确方法,与近代数

学用椭圆积分法所得结果相同。

学识渊博的项名达，很受当时学术界，尤其是数学界的敬重，晚清时期最负盛名的数学家李善兰、华蘅芳等曾对项名达给予高度评价。

项名达的一生，淡于功名利禄，勤于数学研究。他主张中西术相结合，提倡创新精神，其学术思想和峻洁的人品很值得世人称颂和学习。

项名达在微积分传入中国之前，就以其独到的思维方式，达到了微积分的思想。说明即使没有西方微积分的传入，中国数学家也能经过自己的努力，使传统数学逐步由初等数学向高等数学转变。这实在是难能可贵的。

他关于多维几何体的想法，更可以说是超越了时代。

《求表捷术》

在中国近代数学史中，有一本举世瞩目的著作，它就是《求表捷术》。此书问世，立刻轰动了当时中国的数学界。这是因为该书中，在对数以及三角函数对数展开式的研究中，都取得了突破性的成就。而这位专著的作者就是清代著名的数学家戴煦。

戴煦(1805—1860)少年时代与谢家禾一起研究数学，同时对天文学和机械学也有着浓厚的兴趣。他一生笃志好学，淡泊名利。据说，他经常白天读书，夜晚计算，灵感一来，即使半夜，他也要点起灯来演算。戴煦一生所从事的研究是多方面的，著作等身。他在数学领域中的突出成就，是对对数的研究。

在《对数简法》中，戴煦提出了"连比例平方法"，这是中国数学史上第一次明确记载的二项式平方根级数展开式，舍弃了计算繁琐的开方法。不仅如此，戴煦同时还得出了当 $|a| < 1$，m 为任意有理数时，总有

$$(1+a)^m = 1 + ma + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^3 + \cdots$$

的展开式。

同时，戴煦还引用一个"假计对数"的概念，即不用开方表也可直接求得对数，方法是用假设对数来求定准对数，这比用开方表法更方便。这就是现代对数中以 10 为底的常用对数演算法：

$$\lg(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 10}$$

在《续对数简法》中，戴煦又进一步阐明 10 的自然数对数与

任意整数的常用对数，都可用幂级数来计算，提出了由展开式求对数法，并在我国数学史上首次列出了对数的幂级数展开式。

戴煦的《外切密率》(4 卷)和《假数测圆》(2 卷)，则是研究三角函数展开式的专著。

在《外切密率》中，戴煦主要讨论了正切、余切、正割、余割 4 个级数展开式。有了这些展开式，再加上前人对正弦、余弦、正矢、余矢的研究，我国数学家长期以来关于"方圆"互通的研究有了比较满意的结果。戴煦的研究成果对我国近代数学产生了极大的影响。许多数学家在他研究成果的基础上进一步研究，成就卓越。例如，顾观光的关于对数表的研究和圆面积的研究，是对戴煦相关著作的一些补充；邹伯奇则在《续对数简法》的基础上，对二项式 n 次根与对数的幂级数展开式做了进一步的探索，从而扩大了它们的应用范围；夏鸾翔在自己的著作中，推广了戴煦、项名达的椭圆术的应用，解决了许多椭圆积分问题。就此不难看出，戴煦创立的二项式定理展开式，以及对数函数的幂级数展开式，对中国近代数学的研究起了主导作用，大有开山之功。

戴煦《求表捷术》的发表，轰动了当时的数学界。数学家夏鸾翔高度赞扬戴煦的成就是"揭示前人未能揭示的道理"。英国伦敦汉学家艾约瑟和英国学者伟烈亚力在李善兰家中看到戴煦的著作后，大为惊奇，叹为惊世之作。后来，他俩还把戴煦的成果介绍给西方。

中国的微积分学

清末数学大家李善兰，是中国微积分学的先驱。他一生著述很多，为我国的数学事业留下了宝贵的遗产。

李善兰(1811—1882)自幼聪颖，酷爱数学。10岁时学习《九章算术》。15岁时读明末徐光启、利玛窦合译的欧几里得《几何原本》前6卷，竟无师自通。

后来他又学习了李冶的名著《测圆海镜》和清初学者戴震的《勾股割圆记》等，数学水平为同龄人所不及。

有一次，他与学友一起来到东山脚下，有人问他东山有多高。只见他从地上拾起一根草，平伸手臂，眯起眼睛，沿着草的顶端对准东山一瞄，随即脱口而出："26丈。"在场的人无不惊讶。原来，他是巧妙地利用相似三角形对应边成比例的原理，以灵活的目测和心算算出山的高度。学友们对他佩服得五体投地。



1845年前后，李善兰在嘉兴设馆授徒，并经常跟当地的学者探讨数学问题，在这期间，他有关于尖锥术的著作《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》等相继问世。

李善兰的尖锥术，可以说是具有中国传统数学特色的解析几何和微积分。当时，由于清政府的闭关自守，西方数学未能较全面

地传入我国。李善兰则异军突起，独辟蹊径，发表了具有解析几何思想、微积分方法的数学研究成果——尖锥术，是非常了不起的成就。

首先，他所创立的尖锥概念，是一种处理代数问题的几何模型。其次，这种尖锥是由乘方数渐增渐迭而得，尖锥曲线是由随同乘方数一起，渐增渐迭的底线和高线所确定的点的变动而成的轨迹。他对尖锥曲线的描述，实质上相当于给出了直线、抛物线、立方线等方程：

$$y = b\ ,\ y = \frac{b}{h}x\ ,\ y = \frac{b}{h^2}x^2\ ,\ y = \frac{b}{h^3}x^3$$

李善兰的尖锥求积术，实质上就是幂函数的定积分公式和逐项积分的运算法则。

他用分离元数法独立地得出了二项平方根的幂级数展开式。并结合"尖锥求积术"，得到了 π 的无穷级数表达式。

进而，他又推导出了三角函数和反三角函数的展开式，以及对数函数的展开式。

因此，他在使用微积分方法处理数学问题方面，取得了举世瞩目的创造性的成就。

李善兰的另一部重要理论著作是《垛积比类》，写于1859—1867年间，这是有关高阶等差级数的著作。他从研究中国传统的垛积问题入手，获得了一些相当于现代组合数学中的成果。如，三角垛有积求高开方廉偶表和乘方垛各廉表，实际上就是组合数学中著名的第一种斯特林数和欧拉数。

他的创造性成就颇多，如堪称杰作、驰名中外的"李善兰恒等式"；他1872年发表的《考数根法》，是中国素数论方面最早的著作；在判别一个自然数是否为素数时，他证明了著名的费马素数定理，并指出了它的逆定理不真。这些都是非常了不起的成就。

李善兰在数学领域中的杰出贡献是多方面的，人们为了纪念

他，在他的家乡已建立了他的纪念陈列室。

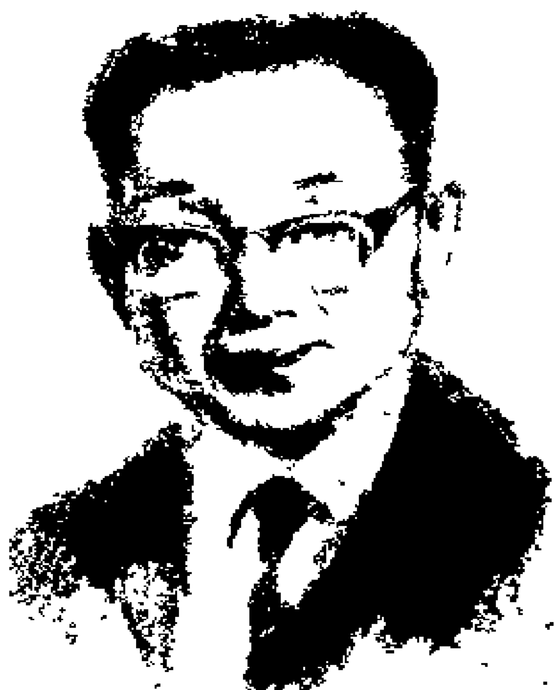
自20世纪30年代以来，李善兰恒等式越来越受到国际数学界的普遍关注和赞赏。一致认为《垛积比类》是早期组合论的杰作。

李善兰的对数论研究，受到中外学者的一致赞誉。英国教士、汉学家伟烈亚力说："李善兰的对数论，使用了具有独创性的一连串方法，取得了如同圣文森特的丁·格里高里（1638—1675）发明双曲线求积法时同样漂亮的结果……倘若李善兰生于纳皮尔（1550—1617）、布里格斯（1556—1631）之时，则只此一端即可名闻于世。"

科研、育人硕果累累的熊庆来

人们在赞美千里马时，总会记起识马的伯乐。中国数学界在赞美华罗庚时，也总不会忘记他的老师，中国现代数学的先驱——熊庆来先生。

熊庆来(1893—1969)字迪之，1914年留学法国，在留学的8年中，先后在4所大学获得高等数学、力学、天文学、高等普通物理学等证书，并于1920年获得理科学士学位。



回国后他由何鲁推荐到南京国立东南大学创办数学系，并任数学教授兼系主任。

当时，条件非常困难，缺少师资，没有教材，经验又不足。熊庆来白天上课，晚上编写数学讲义。他先后编写了《平面三角》、《球面三角》、《方程式论》、《解析函数》、《微分几何》、《微分方程》、《力学》、《偏微分方程》等十多种讲义，其中有几本被商务印书馆选入大学丛书，广为流传。

1926年，清华学校改办成大学，熊庆来经叶企荪介绍到清华大学算学系任教授、系主任。他这时编写的《高等数学分析讲义》被选入大学丛书。很快，清华数学系进入全国数学界的先进行列。

1930年，熊庆来任清华大学理学院院长，并创办了数学系研

究部，成为我国第一个数学研究机构。从而清华大学数学系成为国内数学教学和研究中心。这一年，熊庆来独具慧眼，发现了中国现代数学新秀——华罗庚。在他的几经努力下，将其调到北京。华罗庚不负所望，在熊庆来的关怀下成为数学明星。

1931 年，熊庆来赴欧洲考察，并准备代表中国第一次出席在苏黎士召开的 1932 年国际数学家大会。之后，他重返巴黎，在庞加莱研究所研究整函数和亚纯函数。1933 年他荣获法国国家理科博士学位。

熊庆来回国后，仍任清华大学教授和算学系主任，他更加重视培养数学人才和科学人才。

1935 年，他与胡敦复等人倡议成立了中国数学会，并在成立大会上当选为理事。1936 年初办《中国数学学报》，他曾任编辑委员。

1949 年 6 月，熊庆来赴巴黎参加联合国教科文组织第四届大会。1950 年，对熊庆来来说是最不幸的一年，他因患脑溢血而导致半身不遂。虽经多方治疗，他的右手仍然不听使唤。在这突然降临的灾难面前，他以超人的毅力，仍然坚持研究工作，把全部精力投入到函数论的研究中，用左手写了几十篇论文。

新中国成立后，周恩来总理曾两次邀请他回国工作。1956 年，他在给周恩来总理的回函中说："现在法国正在出版一套数学丛书，其中有关函数论的专著光荣地落在了一个中国人身上，等《关于亚纯函数及代数体函数，奈望林纳的一个定理的推广》脱稿之后即刻启程。"

1957 年 6 月，熊庆来回到了阔别 8 年的祖国，担任中国科学院数学研究所研究员，负责函数论研究室。到 1964 年，他发表了近 20 篇高质量的论文，其中一篇刊于罗马尼亚的《数学汇刊》，两篇刊于法国的《数学学报》。

1963 年，70 岁高龄的熊庆来又录取了杨乐、张广厚两个来自

北大数学系的毕业生，指导他们进行函数论的研究，后来，他们俩不负导师的厚望，在函数论方面完成了具有国际水平的研究成果。

然而，“文化大革命”的风暴席卷中国大地时，熊庆来也未能幸免。1969年2月3日，他怀着对祖国数学事业的眷恋之情，闭上了眼睛。

熊庆来一生中，对中国数学人才的培养及科学研究的开展都做出了重大贡献。他的许多学生，已成为中国及世界上知名的科学家。

熊庆来多年从事亚纯函数方面的研究，共发表创造性论文50多篇。他在博士论文《关于整函数与无穷级的亚纯函数》中建立了无穷级函数的一个一般性理论，包括了所有的无穷级亚纯函数与无穷级整函数。这是波莱尔的关于有穷级整函数与有穷级亚纯函数理论的自然推广，优于布卢门塔尔的工作。这项研究在亚纯函数理论中具有重要的意义，得到了国际数学界很高的评价。他所引入的型函数和定义的无穷级被国际上称为熊氏型函数和熊氏无穷级。

关于奈望林纳的第二基本定理的推广，他也取得了重要成果。他的论文多次被国内外同行所引用，如他的有关基本不等式的研究结果被苏联数学家戈目德贝尔格称为是这方面的最深入的结果。

他著的《关于亚纯函数及代数体函数，奈望林纳的一个定理的推广》一书，被收入国际著名丛书《数学科学纪念文集》之中。

北李南钱的“钱”

正当中国传统数学濒于绝唱的关头，一批中国数学史学家勇敢地挑起了整理、继承、发展中国传统数学的历史重任。他们将晦涩难懂的古代算学思想加以注释、整理，使我国的民族文化遗产重放光彩。在这披荆斩棘的艰难事业中，北方的李俨和南方的钱宝琮（人称北李南钱）是两位卓越的奠基人。这里，我们要说的是数学史上的著名人物，南方的钱宝琮。

钱宝琮（1892—1974），中国数学史家、数学教育家。他6岁受启蒙教育，1907年考入苏州铁路学堂学习，1908年考取浙江省赴欧美的官费留学生，就读于美国的伯明翰大学学习土木建筑工程。1912年回国，历任南开大学、中央大学教师。1927—1928年间，曾参与筹办第三中山大学，即浙江大学，并任数学系首任系主任。以后他一直在浙江大学任教。1956年起任中国科学院自然科学史研究所研究员，直至逝世。

钱宝琮对教学工作极端负责，教学严谨，对学生要求极严。

苏步青教授在回忆浙大时期的钱宝琮时说，他教代数方程求根法，从不假设系数为容易计算的整数，而是从实际需要出发，给以小数表示的系数，然后用迭代法求近似根。这种算法当然很繁琐，初学者不无怨言，但这正是钱宝琮教学严谨的特点。同时，也反映出他在中国算学史研究中不畏难，不怕麻烦，精雕细刻的科学品格。

1932年，钱宝琮出版了其重要的著作《中国算学史》（上）；

1933 年，学艺社出版了钱宝琮的《古算考源》。

1935 年 7 月 25 日到 27 日，在上海交通大学图书馆内举行了中国数学会成立大会。大会上，钱宝琮宣读了他关于数学史的论文《汪莱的方程式论研究》。此次大会上共宣读了 4 人 4 篇论文。这也可看出钱宝琮论文的分量。

1963 年，中华书局出版了钱宝琮校点的《算经十书》。

1964 年，钱宝琮主编的《中国数学史》，由科学出版社出版。

1974 年，他病逝于苏州，骨灰存放在八宝山革命公墓。

1984 年，在钱宝琮逝世 10 周年之际，中国科学院自然科学史研究所编辑出版了《钱宝琮科学史论文选集》，著名数学家华罗庚和苏步青都为此书作了序，为他研究成果的流传做了大量的工作。

钱宝琮是中国用现代数学方法研究祖国算学的奠基人。李约瑟曾这样评价过他："钱宝琮的著作不及李俨多，但有些质量很高。钱先生的研究中，尤以关于祖冲之圆周率的研究最为周详精到，令人折服。"

1992 年 8 月，人们在北京香山举行了中国数学史的国际会议，纪念李俨、钱宝琮诞辰 100 周年，国际数学史协会主席道本先生也参加了会议，以表达对这两位数学史大家的深深纪念。

教育科研双丰收的苏步青

铁鸟南飞云路悠，
耄年未尝鹿城秋。
胸中雁荡嵯峨在，
眼底瓯江委曲流。
几处楼台初矗立，
何时车辆恣奔游。
纵横黉舍弦歌里，
等看群英耀九州。

这首题为《温州之行》的七律，不是出自文人墨客笔下，而是出自年已九旬的著名数学家苏步青之手。那是1991年金秋，作为复旦大学名誉校长的他，刚刚在上海度过执教65周年纪念日，又回到故乡鹿城——温州小住，在那里，他作为温州大学名誉校长登上讲坛。这一回，他不是讲数学，而是讲自己的人生之路，希冀给青年人以历史的启迪。

苏步青，1902年出生，9岁入学，开始时各科成绩都很差。第二年，在老师陈玉峰的帮助下，他开始振作精神，刻苦地读书。功夫不负有心人，期末成绩一公布，同学们惊奇地发现，上学期倒数第一的苏步青，一下跃居全班正数第一名。从此他就跟第一名结了缘。



1914年，苏步青以优异成绩，考取浙江省立第十中学，最初，苏步青的兴趣和才华在

文史方面，是数学老师杨霁朝改变了他的兴趣。这位毕业于东京文理学院的先生，把数学讲得津津有味。在杨老师的指导下，他竟能用20种不同方法证明三角形内角和等于180°，并写成论文，送到浙江省学生作业展览会上展出，该文获得了一致好评。

中学毕业时，苏步青门门功课皆优，数学成绩尤为突出。校长洪彦远对他十分赏识，资助他200块大洋，让他东渡日本深造。临别时，洪校长赠言："天下兴亡，匹夫有责，要为中华富强而奋斗！"

1924年，他以第一名的成绩考入仙台东北帝国大学数学系。1926年同陈建功相遇，两人志趣相投，互相帮助，都在数学上取得了辉煌成就。东北帝国大学在后来的校史上写道，这两位中国学生为这所高等学府增添了光彩。而他们两人在相互交谈中，立志回国创办高水平的数学系，这已成为中国现代数学史上的一则佳话。

1927年，苏步青的第一篇论文《关于菲格德定理的注记》发表在《日本帝国学士院记事》上，在全校引起轰动。这一年，他大学毕业获得学士学位后，免试直接升入该大学研究院读研究生。

1931年对苏步青来说是难忘的一年。按照日本国学术委员会的有关规定，他将自己的研究成果写成200余页的论文，送交学术委员会评审。同年2月底，他的论文通过答辩，随后被授予日本理学博士学位。他成了继陈建功之后在日本获得理学博士学位的第二位中国人。

也就是这一年，日军发动了"九·一八"事变。他牢记洪校长当年的叮嘱，说服了妻子松本米子，一起回到中国。

回国后，他在浙江大学任教授，并与陈建功教授相约，用20年的时间，把浙江大学数学系办成世界第一流的数学系，为祖国培养一批第一流的数学人才。

1952年，全国进行高等院校院系大调整，苏步青与陈建功一起调到上海复旦大学数学系任教。不久，他们又建立起了一个高

水平的数学系，形成了一支富有进取心的数学研究队伍，培养了许多数学明星。他主张学生一定要超过老师，只有这样，才能后浪推前浪，一代胜过一代。这种主张被人们称为"苏步青效应"。

1948年，苏步青著的《微分几何学》由正中书局出版。随后，《射影曲线概论》、《射影曲面概论》、《一般空间微分几何学》、《仿射微分几何学》、《微分几何学五讲》等，一部接一部地问世。在《微分几何学五讲》英文版序言中，当代著名数学大师陈省身高度赞扬说："这是一本优秀的著作，总结了优美的工作成果，而这些工作的大部分是在一个美丽的城市（杭州）完成的。"

苏步青先后出版的十余部科学专著中，有五部被译成英文在全世界发行；所发表的科学研究论文则数以百计。

苏步青在读研究生期间，就曾在日本、美国、意大利的数学刊物上发表了数十篇震惊世界的数学论文，被国际数学界誉为东方国度升起的灿烂的数学明星。《日本数学百年史》则将他在日本时的数学成果，载入了史册。他在《日本数学辑报》上发表的论文，发现的四次（三阶）代数锥面，被人们称为"苏锥面"。苏步青埋头教学与著述，成就卓著，在微分几何学上做出了特殊贡献，德国著名数学家布拉须凯赞誉他是东方第一几何学家。

自学成才的数学大师华罗庚

提到华罗庚，人们对他并不陌生。他是为数不多的自学成才的一位数学大师。他在解析数论、代数学、函数论和应用数学等诸多方面，都取得了卓越的成就。



华罗庚（1910—1985）出生在江苏金坛县的一个小镇上。父亲是一个小杂货商，母亲忙于家务，他们都很少有功夫过问孩子的学习。

小时候，华罗庚贪玩，学习成绩很差，因而老师把他看成是一个笨学生。

不过，华罗庚在数学上的天赋，却很快显露出来了。做数学作业时，他喜欢用不同的方法解题，从不墨守成规，作业本也常常被涂得乱七八糟，但数学老师王维克却从这些涂涂改改中看出了他的数学天赋。

有一次，王老师在课堂上给同学们出了这样一道题："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？"

"23！"老师刚把题说完，同学们还没弄明白是怎么回事，华罗庚的答案就出来了。

"看过《孙子算经》？"王老师惊奇地问。

华罗庚说："我没有看过《孙子算经》，也没听说过这本书。我

是这样算的:3 个 3 个地数,余 2,7 个 7 个地数,也余 2,总数可能是 3 和 7 的公倍数加 2。这当中最小的一个数是 23,而 23 用 5 去除正好余 3,所以 23 就是所求的数了。”

王老师十分惊讶,连声夸赞:“算得好,算得巧!”从此,善于动脑的华罗庚引起了老师的重视。老师便有意识地引导他多读了一些数学书。华罗庚的数学兴趣也更浓了。

华罗庚初中毕业后,家里无力让他继续上学,在家里,他一边帮助父亲经营小店,一边坚持自学。

有一次,他在《学艺》杂志上看到苏家驹教授写的《五次方程式代数解法》一文,发现其中有错,就写了一篇题为《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立的理由》的论文,发表在 1930 年上海《科学》杂志第 15 卷第 2 期上。那年他刚满 20 岁。

清华大学数学系主任熊庆来教授看到这篇论文后,认为该论文简洁明了,立论严谨,是一篇非常优秀的文章。

当珍惜人才的熊庆来教授了解到华罗庚是一个只有初中学历的失学青年时,既惊奇又高兴,他说:“这个年轻人不简单,快请他到清华来。”

华罗庚在清华这个知识的殿堂里,如鱼得水,只用了一年半的时间,就学完了数学专业的全部课程,还自修了英语和法语。24 岁时,他被破格聘为清华大学的教师。

1936 年,他作为访问学者去英国剑桥大学工作。在短短两年的时间里,他写出了《论高斯的完整三角和的估计问题》等十几篇富有真知灼见的论文,使英国人为之倾倒,其关于《塔内问题》的论文,更被誉为“华氏定理”。

1938 年,他回国后,一头钻进了“堆垒素数论”的研究中。在条件相当艰苦的情况下,他写出了 60 万字的巨著《堆垒素数论》。该书中提出了哥德巴赫猜想的攻克方向,论述了数论中的新方向——堆论。

华罗庚一生中发表的论文近300篇，其中《典型域上的多元复变数函数论》一文在数学天地中做出了开拓性的贡献，于1957年荣获中国科学一等奖。他与学生王元一起提出了数值积分的一个新的计算方法，被国外称为“华—王方法”。他还指导工人，把优选法、统筹法运用于生产实践，取得了显著的经济效益。

华罗庚的名字在美国施密斯松尼博物馆和芝加哥科技博物馆等著名博物馆中，跟少数经典数学家列在一起。他曾荣获法国南锡大学、香港中文大学和美国伊利诺伊大学的荣誉博士称号。他不仅是中国科学院的首届学部委员（今院士），也曾被选为美国科学院、第三世界科学院和德国巴伐利亚科学院院士。人们说他创立了华不等式、华方程、华算子、华定理乃至中国数学学派。

华罗庚的专著《堆垒素数论》虽已发表50多年，主要结果仍居世界领先地位，先后被译成俄、匈、日、德、英文出版，成为20世纪经典数论著作之一。

国外数学学报评论说：“华罗庚教授的研究著作范围之广，使他堪称为世界上名列前茅的数学家之一。”

三次东渡求学的陈建功

中国著名现代数学家陈建功在数学园地里辛勤耕耘了半个多世纪，硕果累累，桃李满天下。他在当代分析学方面做出了卓越的贡献。



1910年，陈建功（1893—1971）考进杭州高级师范学校。在那儿他迷上了数学。

1913年，年仅20岁的陈建功，漂洋渡海，来到日本。到日本后不久，他就获得了当时中国政府给予工科学生的官费留学待遇，考入东京高等工业学校学习印染技术。艰苦的生活条件，促使他刻不容缓发奋学习，1916年同时在东京高等工业学校和东京物理学校毕业。

陈建功学成归国，在杭州高等工业学校（浙江大学工学院前身）教染织课程，业余时间仍勤奋地自学数学。为了进一步深造，他于1920年第二次东渡日本，考入仙台东北帝国大学数学系。

1921年，仅一年的时间，陈建功在数学上就取得了成就。在《东北数学杂志》上发表了第一篇论文《关于无穷积的一些定理》，把上一世纪德国数学家维尔斯特拉斯关于判别无穷乘积收敛性的著名定理加以推广，得到了两个更普遍的定理，并把维尔斯特拉斯

定理作为一个特例包括进去。

对此，苏步青曾这样评价过这篇论文："无论在时间上或内容上，都标志了中国现代数学的兴起。"

1921年，陈建功以优异成绩从东北帝国大学毕业回国，任教于武昌高等师范学堂，著名数学家王福春、曾炯之都是他此时的高材生。

1926年冬，陈建功第二次东渡日本，到母校东北帝国大学读研究生，在藤原松三郎指导下，专攻三角级数论。

1928年，陈建功在《东京帝国学士院进展》上发表了论文《关于具有绝对收敛傅立叶级数的函数类》，同年，英国函数论权威哈代和李特伍德得到了同样结果。这表明中国数学家的研究成果已达到国际先进水平，标志中国现代数学研究上的开始。

当时，陈建功的导师藤原松三郎教授苦于自己专业领域内缺少日文著作，只能用英文上课，便委托陈建功用日文写了一部《三角函数论》，这既容纳了当时国际最新研究成果，也包括了陈建功自己的研究心得。他在书写时首创的许多日文名词，至今还在使用。

陈建功在日本学业有成之后，怀着报效祖国的赤子之情，婉言谢绝了导师的执意挽留，毅然决然地返回祖国。

回国后，陈建功和苏步青通力合作，在浙江大学数学系举办数学研究讨论班，注重培养学生独立工作和科学研究能力。为祖国培养了一批又一批数学科研人才。现在许多学生已成为国内数学界的中坚力量，逐渐形成了国内外著名的"陈苏学派"。这个学派代表了中国函数论和微分几何研究的最高水平。

在两年多的研究生期间，陈建功就在日本四家数学刊物上总共发表了论文14篇，质量篇篇上乘，达到了当时三角级数论领域里第一流水平，一时间轰动了日本列岛。他的导师日本数学界前

辈藤原松三郎高兴地说："我一生以教书为业，没有多大成就，不过有一个学生陈建功，是我最大的光荣。"

陈建功发表过60多篇数学论文，在三角级数研究方面，尤其是对平均可和性问题的研究取得了重要的进展。在复变函数论的一个重要方向——单叶函数论研究方面，对于比贝巴赫猜想问题所取得的领先世界的阶段性成果，曾受到美国数学界同行的关注。

在数理统计中的贡献

翻开中国现代数学史可以发现，1949年以前，我国的数学研究，大多集中在纯粹理论数学领域。而应用数学方面，譬如概率论与数理统计等，则因工农业生产上的落后，难以在中国扎根生长，从事此项研究的人也寥(liáo)若晨星。然而许宝騄教授却在20世纪30年代就已开始研究它了。



许宝騄(1910—1970)，中国现代数学家，统计学家。1928年他考入燕京大学学习化学。1930年转入清华大学攻读数学。1936年公费留学英国，两年后他获得哲学博士学位。1940年又获得科学博士学位。同年回国，在昆明西南联大任教。1945年他应邀先后在美国伯克利加州大学、哥伦比亚大学和北卡罗莱纳大学任访问教授。1947年10月回国，此后一直在北京大学任教授。

许宝騄的科学研究生涯是在伦敦开始的。20世纪30年代统计学的研究中心在英国，皮尔逊、费歇尔都是统计学的一代权威，许宝騄在向他们学习时收获很大。

然而，当时英国统计学派的研究，在数学论证方面有不少欠缺，许宝騄就以扎实的数学基本功和出众的才华，完成了许多统计规律的证明。

他出色的两篇统计学论文，发表在《统计研究报告》第六卷上。

第一篇论文考察了一类统计量 u,找到了 u 的密度的级数展开式。这是一个精确的分析,被国外学者称为"数学严密性的一个范本"。

第二篇论文则是关于方差分量和方差数值二次估计的文献起点。

1935 年到 1945 年间,他的论文处在多元分析数学理论研究的前沿。他不仅发展了矩阵变换的技巧,而且还证明了矩阵论中的一些新定理。他在这方面的贡献是巨大的。

许宝騄的后半生,虽体弱多病,但他以超人的毅力从事着科学研究,在多元分析、统计推断和线性模型方面做出了卓越的贡献,尤其在多元分析方面起到了奠基性的作用。他用自己毕生的心血,为祖国赢得了荣誉,给后世树立了光辉的楷模,他也因此而备受人们的热爱和敬仰。

1980 年,北京大学举行了许宝騄诞辰 70 周年的纪念活动。同时,他的学术著作也得到了整理和出版。1981 年出版了《许宝騄文集》,1982 年出版了《抽样论》,1983 年在美国纽约用英文出版了《许宝騄论文选集》。

1984 年,钟开莱、郑清水、徐利治发起设立"许宝騄统计数学奖",由中外学者组成评审委员会,每年评奖一次,奖励 35 岁以下的研究概率论与数理统计成绩突出的青年工作者。

在向现代化的进军途中,人们将会越来越认识到数理统计学的重要,因此也会更加缅怀许宝騄先生。

许宝騄的论文,水平之高,论述之深刻是世界学者们所公认的。他们曾经这样评价他:

"许(宝騄)的证明,基于代数和分析,是特别优美的";

"许的一般处理需要高度的数学才能和数学技巧";

“许坚持深入浅出……默默地投身于学术的最高目标和水准”。

1979年，在他逝世10周年前夕，美国《数理统计年鉴》曾邀请一些著名学者、他的同事和学生撰写文章，介绍他的生平和贡献。

数学大师陈省身

世界著名数学家，现代微分几何的奠基人陈省身博士，是美国科学院院士。他曾任加利福尼亚大学伯克利分校教授，美国国家数学研究所第一任所长和美国数学家协会副主席。

陈省身1911年10月26日出生于浙江嘉兴。他最初的国文知识是一位姑母教的。凭着父亲教他的阿拉伯数字和简单的四则运算，他就试着做《笔算数学》课本中的题目。



《笔算数学》把他带进了一个新的领域。他觉得，9个数字4个运算符号，就能使数的增减递进变化无穷，真有意思极了！但也常被“两数相除，除不尽怎么办”之类的问题所困扰。这反而使他对数学的兴趣越来越浓了。

1922年秋，他全家搬到天津，第二年，陈省身入铁道部办的扶轮中学学习。这所学校为他打好了初等数学的基础，进一步培养了他热爱数学的兴趣。

1930年，他从南开大学毕业后，以优异的成绩，考取了熊庆来先生创办的清华大学数学研究部的研究生。在那里攻读投影微分几何。那时他就有两篇论文，一篇发表于日本著名的东北大学数学杂志上，另一篇发表于清华理科学报上。

1934年，陈省身获得留学奖学金，同年11月入德国汉堡大学。1936年获得博士学位。

接着，他又去巴黎大学，从师著名数学大师E·嘉当，继续深

造。

嘉当是当时世界微分几何学的权威，习惯于用直观的方法来研究数学。他的论著深奥难懂，在一般学者看来，犹如天书一般。陈省身却很快掌握了嘉当的思路，受益匪浅。

一位德国数学家预言："未来的微分几何史，一定会认为陈省身是历史上最伟大的微分几何学家嘉当教授的继承人。"

1937 年，陈省身离开巴黎，经美国、加拿大回国，应清华大学的聘请任数学系教授。

1943 年 8 月，他应美国普林斯顿大学的高级学术研究院邀请，去那里从事数学研究。

在普林斯顿的两年，是他最多产的时期之一。到这里的第二个月，他便完成了被视为"现代微分几何出发点"的高斯—博内公式的内蕴证明，从而成为整体微分几何中的一个经典定理。世界著名几何学家霍普夫评价陈省身的论文时说："微分几何进入一个新时代了。"台湾大学数学系教授赖东升也说，陈省身在微分几何上的贡献，自 30 年代以来，无人出其右。"陈氏级理论"将微分几何从传统上只限于局部性的研究应用，扩大到全面性的应用。也就是说，微分几何的范围从此豁然开朗，自成一门独立的学问。

1945 年 7 月，陈省身又向美国最著名、最严格的《数学纪事》提交了他在普林斯顿完成的另一篇划时代的论文《埃尔米特流形的示性类》。这篇论文写进了后来通称的陈示性类，为大范围微分几何提供了不可缺少的工具。

陈省身 40 年代的研究成果，已成为整个现代数学的重要构成部分。30 多年后，陈示性类通过规范场论与理论物理发生了联系，成为数学与理论物理中极为活跃的研究课题之一。杨振宁曾说他在"1975 年懂得此中奥妙后，真有叹为观止之感"。他因而称它为"划时代的贡献"和"十分美妙的构思"，并认为物理学家必须掌握它。

1946年夏，第二次世界大战结束后，陈省身毅然归国为复兴祖国尽力，在上海建立了中央研究院的数学研究所，着手于训练新人的工作，培养了吴文俊、廖山涛、陈国才等一批新的数学人士。

近年，已是80多岁高龄的陈省身，仍以老骥伏枥志在千里的精神，辛劳奔波于世界各地，致力于数学事业的发展。他深情地说："中国将成为数学大国，这是挡也挡不住的"，"我的最后事业也在祖国"，"我要为中国数学的发展鞠躬尽瘁，死而后已"。

1987年，南开大学为陈省身执教50年举行隆重的庆祝会，陈省身亲手将他所获得的沃尔夫数学奖奖金献给母校。会上中国科学院院长周光召在贺词中尊称陈省身为"中国数学的总教练"。物理学家周培源当场展示了他的题词：数学泰斗环宇崇仰。

数学大师陈省身，由于对数学的重要贡献而享有许多荣誉。

1961年，他当选为美国科学院院士。

1962年到1964年，他连任美国数学学会副会长。

1969年又获芝加哥大学和香港中文大学名誉博士学位。

1970年，获美国数学协会的肖夫内奖。

1975年接受由福特总统授予的美国国家科学奖。

1983年，获美国数学会"全体成就"的斯蒂尔奖。

1981年，他又出任美国国家数学研究所第一任所长。而成立数学研究所这在美国是一个创举，争论了20多年才成立起来，任第一任所长更是非同小可。

1984年5月20日，陈省身在以色列国会，从以色列总统贺佐格的手中接过沃尔夫奖。

美国数学界推崇陈省身为"最有影响的第一号权威人物"。

诺贝尔物理奖获得者杨振宁曾说："陈省身教授今天在几何学界的地位，已直追欧几里得、高斯、黎曼和嘉当。"他的一首《赞陈氏级》的诗，给陈省身的数学理论以极高的赞誉：

天衣岂无缝，匠心剪接成。
浑然归一体，广邃妙绝伦。
造化爱几何，四力纤维能。
千古寸心事，欧高黎嘉陈。

海森堡悬案的澄清

国外的华裔学者在激烈的科研竞争中，越来越显出优势。在数理研究上，他们显示了卓越的才华，林家翘就是其中一个典型的代表，享誉国际数坛。

林家翘1916年7月7日生于北京。

1933年，林家翘以第一名的成绩考入清华大学物理系，毕业后留校任助教。

1939年，他考上公费留学英国的资格，他报考的是应用数学，旨在为发展中国航空工业贡献自己的力量。可是当年秋天，二战正酣，去英国的海路中断，遂改赴加拿大，仅用一年多的时间，他就获得加拿大多伦多大学应用数学硕士学位。随后他转往美国加州理工学院，1944年取得航空博士学位，博士论文是《关于湍流的发展》。

林家翘从加州理工学院毕业后，先到布朗大学任助教，副教授，从1947年至今一直在世界著名学府——麻省理工学院任教。屈指算来，他居住在波士顿这座名城已有40多个春秋了。

林家翘在科学研究上，共发表了论文100多篇。他的主要贡献有两个方面：一是解决海森堡有关湍流的悬案；二是发展星云结构和演化的理论。

那么，什么是海森堡湍流的悬案呢？

1924年，海森堡所写的论文中，有这样一个断言：介于两平行板之间的二维流动，其稳定和不稳定，可由参数 α 和雷诺数 R 间的函数关系 $\alpha(R)$ 来决定。曲线 $\alpha(R)$ 的内部为不稳定区、即将发

展为湍流。海森堡猜想的条件是当 $R \longrightarrow \infty$ 时，$\alpha \longrightarrow 0$。但他未加论证。

海森堡的文章发表后，如同巨石落入平静的湖水，顿时，批评迭起。一时成为一桩科学新闻，到底孰是孰非？这在流体力学界成了一桩久久无法澄清的悬案。

1944 年，林家翘重新研究了海森堡湍流悬案，认为海森堡的结论是正确的，他用一种高于二阶的常微分方程渐近理论加以论证，并指出当 $R^{\frac{1}{3}} \longrightarrow \infty$ 时，$\alpha^2 \longrightarrow 0$，这一精确的结果澄清了海森堡留下的疑团。

1956 年，海森堡本人肯定了林家翘的结果。

两年后，托马斯在 IBM 计算机上工作了 150 小时，证实了林家翘的结论是正确的。

1955 年英国剑桥大学出版社推出林家翘《流体稳定性理论》专著，一举成了流体稳定性和湍流发展的里程碑式的著作。1958 年，苏联又将该书译成俄文出版。

林家翘的这一工作，是许多应用性研究的基础，所发展的数学方法具有广泛的价值。他也因此而被公认为是一流的应用数学家。

1960 年以后，林家翘的兴趣转向天文物理学，他的主要贡献是提出了星云演化理论。他和徐遐生提出了一种动态数学模型，这是一组非线性的微分积分方程。他们的理论不断得到观测资料的证实，并在不断改进过程中引进计算机技术，使这一模型的动态演示更为清晰。这一成就被称为“天文学核心领域的一次突破”。

林家翘一生极力倡导应用数学，推动应用数学教育。他在麻省理工学院首先设立应用数学部，以推动应用数学教育的普及，现在美国大约有 1/3 的大学设有应用数学系。在我国，他指导的清华大学应用数学系也在蓬勃发展。

林家翘由于贡献卓著而获得了众多殊荣。

1951年，年仅35岁的林家翘被选为美国艺术和科学院的院士，成为荣获这一称号的第一位华人。

1976年，获美国力学工程学会的铁禾辛哥奖。

1977年，获美国国家科学院的应用数学和数值分析奖。

1979年，获美国物理学会的流体动力学奖。

数学机械化

把数学和机械化扯到一起，这可是一件新鲜事。那么，如何实施数学机械化呢？数学机械化宏伟纲领又是谁提出的呢？

他就是我国当代杰出的数学大师——吴文俊。



1940 年，吴文俊毕业于上海交通大学数学系，1946 年 4 月进入中央研究院数学研究所工作。在陈省身的带领下，他很快掌握了新理论，开始独立研究。在一年多的时间内，他用简单方法证明了惠特尼示性类中的乘法公式。这一独创现在已成为示性类理论的经典。

20 世纪 50 年代，吴文俊的研究重点从示性类转向示嵌类的研究。他用统一的方法，系统地改进了以往用不同的方法所得到的零散的结果。由于他在拓扑学示性类及示嵌类方面的出色成绩，他与华罗庚、钱学森一起荣获 1956 年国家第一届自然科学奖的最高奖，并于 1957 年被评为中国科学院学部委员。

在十年动乱时期，他克服了种种困难，仍取得了令人欣慰的成绩。他发现示嵌类理论可用于印刷电路的布线问题，并相继发表了《集成电路设计中的数学问题》、《印刷电路与集成电路中的布线问题》的论文。他的方法完全是可以算法化的，而这种“可计算性”与以前在布尔巴基影响下的纯理论的方向完全不同。

70 年代中期，吴文俊的研究兴趣很大程度上转向中国古代数

学史。他从中国古代数学的思想和方法中汲取营养，古为今用，首先在几何定理的机械证明的研究中获得了成功。1976 年到 1977 年间，他得出了初等几何主要定理的证明可以机械化的结论，并把问题分成 3 步论述：

第一步，从几何的公理系统出发，引进数系统和坐标系统，使任意几何定理的证明问题，成为纯代数问题。

第二步，将几何定理假设部分的代数关系式进行整理，然后依确定步骤验证定理终结部分的代数关系式是否可以从假设部分已整理的代数关系式中推出。

第三步，依据第二步中确定步骤编成程序，并在计算机上实施，以得出定理是否成立的最后结论。

1977 年，吴文俊在一台长城 203 式台式计算机上，首次按以上步骤完成了西姆逊线定理的证明。继而，又陆续证明了 100 多条定理。

后来，又有人利用吴文俊的办法证明了 600 多条定理。

1978 年初，他提出了初等微分几何中的一些主要定理的证明也可以机械化的结论。

尔后，他把机器证明的范围推广到非欧几何、仿射几何、圆几何、线几何、球几何等多个领域。

吴文俊在《几何定理机器证明的基本原理（初等几何部分）》的“导言”中是这样说的：“本书所阐述的几何定理证明的机械化问题，从思维到方法，至少在宋元时代就有蛛丝马迹可寻。虽然这是极其原始的，但是，仅就著者本人而言，主要是受中国古代数学的启发。”

他还认为：“中国古代数学，基本上是一种机械化的数学，是机械化体系的代表。”他认为自己的研究工作仅是一个开端，如何继承发扬我国古代传统数学的机械化特色，对数学各个不同领域探索实现机械化的途径，建立机械化的数学，则是 20 世纪以至可

能绵亘整个21世纪才能大体趋于完善的事。

吴文俊坚定地认为:“复兴而不仅是振兴中国数学,使自秦汉迄宋元傲居世界舞台中央的中国数学重展昔日雄风于今日,应该是完全可能的。”

吴文俊的几何定理机器证明理论,受到国际数学界的热情赞扬。

数学家莫尔认为,在吴文俊以前,机械化的几何定理证明处于黑暗时期,而吴文俊的工作给整个领域带来了光明。

美国定理自动证明的权威人士沃斯认为,中国吴文俊的证明路线是处理几何问题的最有力的方法,吴文俊的贡献将永载史册。

杨氏理论与方程

荣获诺贝尔奖的杨振宁，是当代大物理学家之一。他对20世纪数学的发展，也有着非凡的贡献。尤其是80年代以来，源于杨振宁的两个数学研究分支：杨—米尔斯理论和杨—巴克斯特方程，先后进入当代数学发展的主流，引起文献爆炸和全球性研究热潮。

杨—米尔斯理论及其中谈到的杨—米尔斯方程，是杨振宁和米尔斯在论文《同位旋守恒和同位旋规范不变性》中提出的。



对于杨—米尔斯理论在当代数学中的作用，美国国家科学研究委员会数学科学组的一份报告里这样说：

杨—米尔斯方程的自对偶解具有像柯西—黎曼方程的解那样的基本重要性。它对代数、几何、拓扑、分析都将是重要的……在任何情况下，杨—米尔斯理论，都是现代理论和核心数学的所有子学科间紧密联系的漂亮的范例。杨—米尔斯理论乃是吸引未来越来越多数学家的一门年轻的学科。

杨—巴克斯特方程，最早见于杨振宁1967年发表的一篇统计力学论文《函数相互作用的一维多体问题的一些严格解》。

尔后5年，巴克斯特在解决8顶点冰模型时，也得出了同样的方程。

1988年，苏联数学家法捷耶夫将此方程称为杨—巴克斯特方

程，随之便被人们所接受，一直沿用至今。

这样，20 世纪 80 年代以来，围绕杨—巴克斯特方程展开了多层次，多方向的研究，形成了又一次“文献爆炸”。它所涉及的领域有：

物理学：一维量子力学问题，二维经典统计力学问题；共形场论。

数学：纽结理论；辫结理论；算子理论；霍普夫代数；量子群；三维流形的拓扑；微分方程的单值性。

现在看来，杨—巴克斯特方程和杨—米尔斯方程一样，都是现实世界所提出的基本数学结构。

有人认为，杨—巴克斯特方程的影响才刚刚开始，目前看到的也许只是冰山的一角。

人们认为，对数学有重大贡献的物理学家，继牛顿之后，有傅立叶、麦克斯韦、爱因斯坦和狄拉克，而当代则非杨振宁莫属了。

国际数学界对杨振宁的两项数学贡献：杨—米尔斯理论和杨—巴克斯特方程给予(jǐ·yǔ)了极高评价。在 4 年一度的数学界最高奖—菲尔兹奖的颁奖大会上，唐纳森、福尔廷斯、弗里德曼 3 人获奖，德林菲尔德、琼斯等人，都因从事杨—米尔斯理论、杨—巴克斯特方程的研究而获殊荣。

人们认为，与杨—米尔斯理论，杨—巴克斯特方程密切有关的数学物理，已成为 20 世纪 80 年代数学发展的主流，并且还将继续发展下去。

哲学与数学联姻

华裔哲学家、数理逻辑学家王浩是一位将哲学与数学联姻的专家。他在这方热土上辛勤耕耘，取得了卓越的成就，誉满全球。

王浩，山东济南人。少年时代在姐姐家看了金岳霖先生所著《逻辑学》，深为书中的内容所吸引，从而对逻辑与哲学产生了浓厚的兴趣。

1939 年，王浩考入西南联大数学系。可是，他从大一开始，就经常跑到哲学系去旁听。当时，杨武之教授深为不解，劝他说："你数学学得很好，为什么要去修哲学呢？"

尽管这样，王浩从数学系毕业后，还是进了哲学系读研究生，并以论文《经验知识的基础》获得硕士学位。

1946 年，他通过了公费留学考试，进入哈佛大学哲学系攻读博士学位，导师奎恩是当时最负盛名的美国哲学家。经过 2 年的刻苦学习，就以《经典分析的一种简约的本体论》获得哈佛大学哲学博士学位。

1950 年左右，美国哲学界热衷于数理逻辑的研究，而公理集合论正是哲学、数学和逻辑学的一个交会点。王浩以其娴（xián）熟的数学功底和多年积累的逻辑知识，很快就在这一领域内大显身手。

王浩于 1952 年出版了第一部专著《数理逻辑概论》，奠定了他在这一研究领域的地位。

1953 年，王浩开始考虑回国问题，他私下在想，我应带点什么回国呢？应带回国内一些比较实用的知识才好。在这种想法的驱

使下，他注意到电子计算机中的逻辑问题。从此他便展开了工作，第一个问题是有关一般递归函数的分类，相应地给出在计算机上可计算的理论准则。

经过4年的奋斗，王浩取得了一定的成果。1957年，发表了有关图灵机的模型，受到了广泛的好评，声名鹊起，被认为是第一次建立了电子计算机式的图灵机理论。

从1958年开始，他研究用计算机证明定理。他第一个提出了一种证明程序，能用机器证明罗素和怀特海在名著《数学原理》中提到的350多个数学定理。由于这一突出成就，1983年国际人工智能联合会把首届“里程碑”奖授予王浩。这是多么令人羡慕的荣誉啊！

后来，王浩和20世纪的大逻辑学家哥德尔结成挚友，并于1987年由麻省理工学院出版社出版了两部他谈哥德尔的论著——《哥德尔印象》和《与哥德尔的谈话》。不久，中、法、西和日文本的《哥德尔印象》也相继出版。

由于研究成果卓著，王浩赢得了许多荣誉。

1952年，他被选为美国科学院、艺术学院的院士。1980年，王浩成为英国不列颠科学院的国外通讯院士。

令人称道的是，王浩还以研究西方哲学见长，发表了许多自己的哲学见解，这种把哲学和数学联姻的巧妙方法，令西方哲学家佩服不已。

由“组数”引起的故事

在我国著名的数学家中，谷超豪的经历很耐人寻味。因为，他小时候并不是那么聪明，可他喜欢看书，尤其喜欢看那些生动有趣的自然科学方法的书。

读书丰富了他的知识，使他发现了许多奇妙的问题。渐渐地，他变得比别人聪明起来了。

谷超豪在中学读书时，有一次，数学老师讲完乘方后对同学们说：

“同学们，在布置作业前，让我们共同做一个数学游戏。”

一听说游戏，同学们个个兴致勃勃，教室里严肃紧张的气氛顿时被轻松、愉快的情绪驱散了。

“第一个游戏是：用四个 1 组成一个最小的数。”老师伸出个指头，接着说：“不准用任何运算符号，看哪位同学组得既快又准。”

同学们认真地思考起来。

“报告老师，最小的数是 1111。”一个同学抢先回答。对此，老师没有表态。

“组成的最小数是 111^1。”第二个同学接着回答。

老师摇了摇头，显然问题的答案不对。

同时，有的同学在草稿纸上列出 11^{11} 的式子进行计算，可是很快地发现，这个数要比 1111 大得多，自然也就打消了回答的念头。

这时，谷超豪举手，站起来回答说：“用四个 1 组成的最小数是 1^{111}。”

“这个数是几？”老师听后，立即追问。

“是1，因为111个1相乘还得1。”

老师点点头，说：“你能不能把四个1组成的数，按照从小到大的顺序排列起来？”

谷超豪马上做出了明确的回答。老师依他的答案，在黑板上写出了这样一行数字：

$1^{111} < 111^{1} < 1111 < 11^{11}$

“同学们，”老师用喜悦的口吻说，“刚才第一个游戏里要组成最小的数；下面做第二个游戏，用三个9组成一个最大的数。”

有的同学很快回答是999；

有的同学认为这个答案不对，应该是99^{9}；

还有的同学提出最大的数应是9^{99}；

教室里沉默了。老师微笑着，看着大家，期待着还有同学起来发言。

这时，谷超豪举手回答说：“$9^{9^{9}}$。”

“谷超豪你再算一算，9的指数是9的9次方，9的指数具体是多少？”老师心情激动地说。

通过计算，谷超豪回答出9的指数是：$9^{9} = 387420489$，也就是说，$9^{9^{9}} = 9^{387420489}$。

不难看出，$9^{387420489}$要比9^{99}大得惊人，而9^{99}又比99^{9}大，最小的是999。若按照由大到小的顺序，把这四个数排列起来就是：

$9^{9^{9}} > 9^{99} > 99^{9} > 999$

“同学们，乘方可以使一个很小的数变得异常庞大。”老师总结说，“$9^{9^{9}} = 9^{387420489}$，这个数大到计算起来都十分困难。如果用笔计算，平均每10秒钟计算完一次乘方，昼夜不停，要把9的387420489次乘方计算完，大约需要150多年。计算出的这个数字，用5号铅字排列起来，长达几千亿千米……”

谷超豪中学时代“组数”的故事，被人们传为美谈。后来成为

数学家的他，同样在数学园地里做出了非凡的贡献。

他从事 K 展空间微分几何学研究，取得了一系列成果，代表性论文《隐函数方程式表示下的 K 展空间理论》(1951 年)，引起国际上同行的注意。他对仿射联络空间和芬斯拉空间的研究，包括整体的嵌入问题等，都取得了很有意义的成果。

1957 年，他在莫斯科进修期间，完成了《论变换拟群的若干通性及其在微分几何中的应用》的论文。莫斯科大学为此授予他物理数学科学博士学位。

回国后，他研究判定了能作为无限连续群、速向群的所有实不可约的线性群，在国际上居于领先水平。

他解决了和气体力学中激波现象密切联系的一些重要定解问题，其中有些结果比国外研究早了 10 年。

他对正对称型方程组和多元混合型方程组的研究，也取得了重大突破。

另外，关于规范场的研究是谷超豪所从事的第三个大方向。他在和杨振宁博士共同研究中取得了很有价值的成果。这些都体现在他的综合性长篇论著《关于经典场——米尔斯场》里。

谷超豪所取得的成就，令世人瞩目和叹服。

1976 年，美国数学家代表团访问中国时，对谷超豪的研究成果给以充分的肯定，认为这些工作十分新颖和相当重要。

夏道行函数

看了题目，你可能会猜想，这一定是以某位数学家的名字而命名的。事实的确如此，夏道行是我国当代数学家。而“夏道行函数”则是国际上以他的名字命名的一项研究成果。

夏道行，1930年出生于江苏泰州市。1950年他毕业于山东大学数学系，随即考入浙江大学数学系，从师著名数学家陈建功，研究生毕业后到复旦大学任教。1981年当选为中国科学院学部委员。

夏道行从20世纪50年代初，跟随陈建功研究复变函数论，成绩卓著。

1957年，他证实了戈鲁辛猜测。论证的高度技巧让国外同行叹为观止。

同时，夏道行研究的一类函数取得重大突破，引起世界轰动，国际数学界把他的这一研究成果，命名为“夏道行函数”。

同年他去苏联进修，在那里他受到著名数学家盖里范德的悉心指导，转攻国内基础薄弱的泛函分析专业。

在讨论班上，他才思敏捷，异常活跃，受到苏联同行的称赞。在很短的时间里，他就写出了广义函数方面的论文多篇。

回国后，他更加勤奋努力，以多篇高质量的论文引起了国内外数学界的广泛关注。

1965年，他的专著《无限维空间上的测度和积分论》出版了。

1972年，此书被美国科学出版社翻译成英文出版。扉页上说：本书第一次广泛详尽介绍无限维空间上测度和积分理论在量

子场论等方面的应用。作者巧妙地运用无限空间测度论的技巧，对拓扑代数上的正泛函表示理论作出新奇而有启发性的发展。

同时，夏道行和严绍宗（陈建功的助教）在无限维空间上测度理论上取得的成就，还被台湾学者杨维哲列入教科书《泛函分析导论》。

1983 年，夏道行的专著《线性算子谱理论（I）》出版。该书是他在亚正常算子和半亚正常算子方面获得的系统结果。这一成果跃居世界领先地位。

夏道行在泛函分析方面的成就很多。他的幂对合赋半范论和局部有界代数理论，曾多次为中外数学家引用。

1959 年夏道行建立了“拟似共形映照的参数表示法”。20 多年来，一直被世界函数论专家所引用，特别为芬兰数学家所引用和称道。

澳大利亚数学家称夏道行为中国“在泛函分析方面”有代表性的数学家。

20 世纪 60 年代初，他建立的非正常算子的奇异积分模型，触发了世界上在这方面的大量研究，获得了许多成果。

夏道行在不定尺度空间上的研究与现代数学物理紧密相关，在这方面他的贡献巨大。

摘取数学皇冠上的明珠

哥德巴赫猜想是著名的世界数学难题。1912 年，德国数学权威郎道就断言：即使证明比它弱的命题，也是现代数学家所不能做到的。

那么，“哥德巴赫猜想”是怎么一回事呢？

要解决这个问题，则需要从德国数学家哥德巴赫说起。

德国数学家哥德巴赫（1690—1764）从 77 = 53 + 17 + 7，461 = 449 + 7 + 5，461 = 257 + 199 + 5 这 3 个式子中，发现每次相加的 3 个数都是素数，就进一步大胆猜想：所有大于 5 的奇数，都可以分解为 3 个素数之和。（注：素数也称质数，指的是大于 1 的且除 1 和它本身之外不能被其他任何正整数整除的整数。）

然而，哥德巴赫提出的猜想，自己却无法在理论上证明。于是，他于 1742 年 6 月 7 日写信给大数学家欧拉，请他帮助解决这个问题。同年 6 月 30 日欧拉回信表示：这个问题我虽然不能证明，但我确信它是正确的。同时，欧拉又补充指出：任何大于 2 的偶数都是两个素数之和，简称为“1 + 1”。后来，这两个命题被合称为“哥德巴赫猜想”。

令人欣喜的是，在证明哥德巴赫猜想这场国际数学竞赛中，我国数学家做出了重要贡献，并取得了领先地位。

早在 1938 年，我国著名数学家华罗庚就曾经证明：“几乎全体偶数都能表示为两个素数的和。”1956 年，我国数学家证明了“3 + 4”，第二年又证明了“2 + 3”。1962 年，我国数学家潘承洞证明了“1 + 5”，1963 年他和王元一起证明了“1 + 4”。1966 年，陈景润更

上一层楼，率先证明了“1 + 2”，这是目前世界上研究哥德巴赫猜想的最佳成果。



然而，成功的背后都是艰辛的劳动。“1 + 2”，陈氏手里的这颗数学皇冠上的明珠，挂满了辛勤的汗水。

有一次，陈景润在图书馆里查阅资料，由于专心致志，下班铃响过后，图书管理员大声招呼大家出门，他一点儿也没有听见，当他感到肚子饿了时，才发觉外面的门已经锁上了。他摇了摇头，又转身钻到书堆里去了。

又有一次，他在办公室工作了好几个小时后向宿舍走去。他一边走一边思索问题，不觉撞到一棵树上，还问是谁撞了他。他在路上走来走去，不知怎么又回到了办公室门口，他自然自语地说：“那就继续干吧。”于是，他在办公室里又演算了一个晚上。搞科研到了如痴如迷的程度，以至于有人称他是“科学怪人”。

1966 年 5 月，陈景润在中国科学院的一级刊物《科学通报》上宣布证明了“1 + 2”，即“任何一个充分大的偶数都可以表示成为一个素数加上顶多是两个素数的乘积的和”。这是哥德巴赫猜想的重大突破。

从 1966 年到 1972 年，他一直潜心研究，用更新更简捷明了的方法，改进他对“1 + 2”的证明，增大估计的下界系数。

1973 年 2 月，陈景润终于找到了一条简明证明“哥德巴赫猜想”的道路，在《中国科学》上发表了题为《大偶数表为一个素数及不超过两个素数的乘积之和》的论文。论文轰动了国内外的数学界。国际上把他的论文称为“陈氏定理”，他得到的

$$Px(1,2) \geqslant \frac{0.81\ x\ c}{(\lg x)^2}$$

被公认为“是当代在哥德巴赫猜想的研究方面最好的成果”。

陈景润并不满足于已取得的成就，不久，他又完成了《算术级数中的最小素数》的论文。这一成果是当时世界上最有突破性和创造性的。

“陈氏定理”为他赢得了崇高的荣誉，1978 年全国科学家大会上他受到表彰，1980 年当选为中国科学院学部委员，1981 年获全国自然科学一等奖。

陈景润为振兴祖国的数学事业，奉献了毕生的精力，不幸英年早逝，人们将永远怀念他。

一位英国数学家惊叹“是什么力量和意志，使他解决了如此之难的问题”，真是“移动了群山”。

美国著名数学家外尔深知科海探索的艰难困苦，他说：“陈景润的工作现在好像在喜玛拉雅山的顶峰上行走，每前进一步都非常困难。”

英国著名数学家哈伯斯坦和李希特说：“陈氏定理构成了筛法理论的光辉顶峰！”

数学奇人朱梧槚

朱梧槚的名字，对于一般人来说，或许是十分陌生的。然而，在数学界，他的大名不仅在国内，就是在国外也是响当当的。

朱梧槚教授科研成果斐然，人生道路坎坷，人们都敬佩地称他为“数学奇人”。

朱梧槚1935年出生，读初中时，数学老师杨浩生先生的数学水平较高，授课方法得当，很受学生欢迎。朱梧槚因喜欢老师而爱上了数学。读高中时，他和几个爱好数学的同学自发组织了数学研究会，讨论初等数学问题。

在东北工学院读大学二年级时，他又迷上了哲学，不到一年功夫，就做了6本厚厚的哲学笔记。哲学系教授刘丹岩看了这些笔记后，认为朱梧槚很有哲学天赋，立即找他谈话，表示愿意指导他选修各门哲学课程。从此以后，朱梧槚的主要精力便放在两个方面：一个是数学，一个是哲学。

“兴趣是最好的老师”，朱梧槚在大学期间，他的这两门课学得都很出色。1955年他大学毕业后，被留校任数学助教兼哲学助教。这为他以后成就的取得，打下了坚实的基础。

工作中，他又拜数学系徐利治教授为师，教学相长，业务水平有了飞速的进步。

徐教授在一篇论文中提出了“不断延伸”与“相对穷竭”两条原理。朱梧槚阅读后认为这是黑格尔的消极无限与积极无限在数学领域里的具体表现，从而找到了这两条原理的哲学依据和实际背景。

1900 年 8 月 8 日，在巴黎举行的展望新世纪国际数学家大会上，被称为无冕数学之王的希尔伯特发表了著名的演讲——《数学问题》。他列举了 23 个没有解决的重大数学问题，其中第一个问题就是"连续统假设"。直观地讲，就是究竟有多少个实数的问题，或者说，一条直线上究竟有多少个点的问题。这个问题最早是由 1882 年集合论的创始人康托尔提出来的。不过，直到康托尔逝世，他也没公布他的证明。探索和证明的艰巨任务落到了后来者的肩上。

面对这些数学难题，朱梧槚和徐利治教授首先向第一个问题挑战。他俩联合攻关，从 1956 年到 1957 年，他们连续发表了 4 篇论文，其中《超穷过程论的基本原理》与《在朴素集论与超穷过程论观点下的康托尔连续统假设的不可确定性》被列为国家级重要论文。

研究中，他俩提出一个重要结论：连续统假设不可确定性。苏联《数学文摘》于 1959 年到 1960 年间陆续评介了这 4 篇论文，特别指出：连续统假设不可确定性是一种全新思想。

然而，就在他们不断取得新成果的时候，一场政治上的反右斗争，将他们打倒在地，他们被迫停止了正在进行中的科研工作。

1968 年 5 月，传说宜兴地区发生了一起空降特务案，正巧靠修理谋生的朱梧槚有一台用来修理马达的绕线机，于是传出"朱梧槚有枪有电台"的谣言，同年 7 月，他被造反派抓走。

朱梧槚身陷逆境，仍不能"安分守己"，一有时间他就不停地写呀、算呀，战胜常人难以想像的困难，完成了《潜尾数论导引》和《论一维空间的超穷分割》两部书稿和其他论文。

1978 年，朱梧槚平反昭雪后，被南京大学数学系聘用。巧合的是，徐利治教授也来到南京，命运又把他们安排在一起，他们决定再度合作攻关。

被黑格尔称为"辩证法始祖"的古希腊哲学家、数学家芝诺曾

提出4个著名悖论，其中有一个叫做“两分法悖论”（抛球悖论）。这个悖论在其后的2500多年中，一直被人们争论不休。潜无限论者不承认任何无穷过程能进行完毕，只承认可以无限制地进行下去，从而抛球手续永远滞留于无限制的往复进程之中；而实无限论者却承认无限往复的抛球手续是能够进行完毕的，然而却又无法加以证明。

对此，知难而进的朱梧槚，根据徐利治教授提出的“双相无限”原则，把唯物论的反映论原理应用于数学，构造非标准的自然数序列模型，彻底解决了这个抛球问题。1984年6月，他完成了《有穷或无限值悖论》一文，解决了无穷值悖论问题。

朱梧槚还和肖奚安硕士合作研究中介公理集合论系统。他们创建的中介数学系统，解决了如何修改、概括原则的历史遗留问题，完成了数学研究对象由明晰性到模糊性的再扩充。

中介数学系统的理论诞生以后，很快就引起了我国一批中青年逻辑工作者的兴趣，有关这方面的论文随后不断问世。

就在朱梧槚受迫害期间，美国数学家科恩完成了连续统假设相对于ZFC公理系统独立性的证明，也就是说连续统假设相对于ZFC公理系统来说是不可制定的。这是60年代集合论的最大进展之一。

为此，美国《数学评论》杂志执行编辑罗华特教授写信给徐利治、朱梧槚两人，信中非常惋惜地说：“科恩的工作是惊人的，但我留有深刻印象的是在这很久以前，你们获得的连续统假设不可确定这一正确思想及直观性结果。”

1986年，朱梧槚的名字被列入了美国出版的《世界数学家辞典》。接着，国际名人传记协会决定授予他终身荣誉会员的光荣称号。

中学教师攻克世界性难题

在组合数学中，有两个世界性的难题——柯克曼女生问题和斯坦纳系列问题。

对这两个问题，100多年来，世界各国数学界都相继投入很大的力量，试图解决它们，但进展不容乐观，它们已被公认为是组合学理论上的大难题。可是，谁能想到，我国的一位中学教师——陆家羲，竟成为攻克这一难题的中坚分子。

1953年，年仅18岁的陆家羲读了一本数学普及读物——《数学方法趣引》。该书深入浅出地介绍了两个有趣的组合数学问题，即柯克曼女生问题和斯坦纳系列问题。他被深深地吸引住了，产生了跃跃欲试的愿望。

然而，他心里非常清楚，自己仅有的初中文化水平，是不可能解决世界数学难题的。

于是，他便利用业余时间刻苦地自修高中课程，自学了俄语、地理、文学、历史、哲学、伦理学等方面的知识，经过5年的勤奋自学，于1957年考入东北师范大学物理系。

毕业后分配到包头钢铁学院任助教。从此陆家羲对柯克曼女生问题的研究便拉开了序幕。

柯克曼女生问题是英国著名数学家柯克曼于1850年提出来的。问题大意是：一位女教师每天都要带领15名女学生散步。她要求学生们每3人排成一行，共排5行。问能否给出一周（7天）内的队列安排，使得两名学生在7天中都恰有一天排在同一行。当时柯克曼本人在第二年解决了上述问题的一个RB(3,1;15)设

计;而它一般的RB($K,\lambda;V$)设计的存在问题,被后人称为柯克曼女生问题。

斯坦纳系列问题是数学家西尔威斯特在柯克曼女生问题提出不久,进一步演化该问题提出来的。其大意是:希望给出一个连续13周的队列安排,使得不仅每周的安排都符合"柯克曼女生问题"的原来要求,而且要求每三名女生在全部$13\times7=91$天中,都恰有一天排在一行。

陆家羲凭着扎实的数学功底,使他的研究进展顺利。当年,他就取得了两个具有当时世界上领先水平的结论。遗憾的是他写的两篇论文,投到国内有关刊物后,因审稿方面的判断失误,而未能及时发表公布于世。从而使中国丢掉了在RB($3,1;V$)和RB($4,1;V$)方面的优先权。

论文被退回来了,陆家羲并没气馁(něi),反而更加下定决心向新的高度发起冲击。但是1963年包头钢铁学院下马了,陆家羲只好先后在包头教育局教研室、包头八中、五中、二十四中和九中工作,任中学物理教师长达20年之久。繁重的教学任务并没有使他丧失研究的热情,他将剩余的时间和精力全部投入到"柯克曼女生问题"的研究中去,终于在1979年7月得到了$\lambda>1$时的一般性结果。

1983年7月,陆家羲在大连举行的全国第一届组合数学会议上报告了他的上述成果。这一成果在1984年10月份的《数学学报》上正式发表。它是迄今为止在柯克曼女生问题的研究方面所取得的最好结果。

随后,他又集中精力向斯坦纳系列问题发起冲锋。他克服了各种困难,终于在1981年9月至1983年3月间连续撰成了《论不相交的斯坦纳三元素大集》,共6篇论文,基本上解决了这一难题。

对于遗留下的6个未定阶数他声称已构思成熟,不久将完成

关于斯坦纳三元素大集的第7篇论文。然而，让人惋惜的是：他动笔不久即离开了人世，只留下了26页手稿。1989年，泰里内克以陆家羲所提出的辅助设计LD为工具，最终完成了对6个阶数大集存在的证明。

令人遗憾，然而也令人高兴的是，在陆家羲生命的最后一年，即1983年他48岁的时候，他的研究成果才被中外数学家所了解和确认。

1983年7月访华的国际著名组合数学家、加拿大多伦多大学教授门德尔森，赞扬陆家羲的研究工作是组合设计领域中20年来的重大成就之一，称他是一位优秀的组合家。

同时，多伦多大学校长来信热情邀请他去进行研究。

美国《数学评论》杂志主管编辑函请他担任该刊的评论员。

国际组合论界权威性刊物，美国的《组合论杂志》A辑分别在1983年和1984年这两期上，以总共100多页的惊人篇幅连载了他的6篇论文。

他英年早逝，的确是世界组合数学界的一大损失。

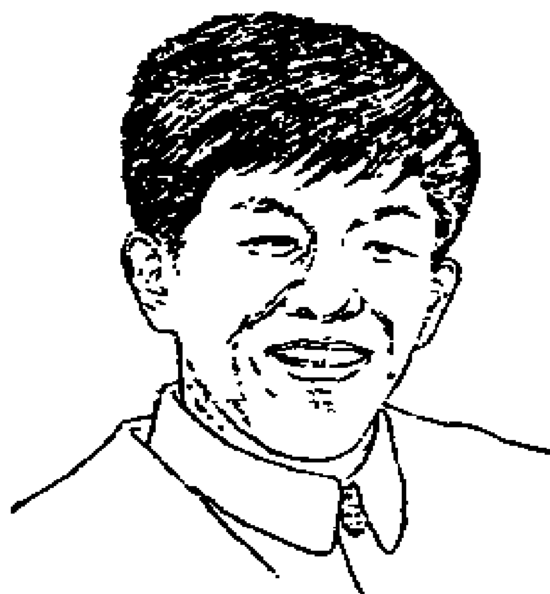
一鸣惊人的杨乐

同新中国一起成长起来的数学家杨乐，在函数论研究方面，取得了可喜的成果。

他的论文被国际数学界誉为精彩的论文，惊人的成就。杨乐为中华民族争得了荣誉。

杨乐1939年出生，从小就是个出名的小数学迷，被人称为"神童"。课堂上所学的数学知识满足不了他的求知欲望，课外他就到处借阅数学参考书，做大量的课外习题。

有一次，他在书店里看到一本新出版的数学书，喜欢极了，可是他家里的经济条件不允许他想看一本就买一本。



怎么办呢？他想出一个办法！他飞快地跑回家，把已看完的两本旧书拿出来，兴冲冲地回到书店，对售货员说："叔叔，我用这两本书换你书架上的那一本行吗？"售货员觉得这孩子很天真，摸着他的头说："小朋友，这是不行的。"杨乐非常失望，售货员见他眼睛一个劲地盯着那本书，久久不肯离去就对他说："如果你想看那本书，可以随时到书店来看。"杨乐听后高兴地跳了起来。

就这样，对数学着了魔的杨乐，每天放学后都到书店来看书，直到把那本书看完为止。

中学时，杨乐的数学本上总是写着“中科”两字，同学们很奇怪，但谁也不解其意。后来来了一位新数学老师，为了摸底，接连进行了3次测验，杨乐每次都是第一个交卷，而且都是满分，这引起了老师的特别注意。不久他也发现了杨乐本子中的“中科”两字，好奇地问：“杨乐，你本子上的‘中科’是什么意思？”

杨乐说：“数学上的许多定理和公式都是用外国人的名字命名的，我不信外国人就比中国人聪明。我长大后要到中科院研究数学，攻克数学尖端问题。”老师听后很为杨乐的雄心大志而高兴，热情地鼓励了他。

1956年，不满17岁的杨乐以优异的成绩考入北京大学数学系。学习期满真的进了中国科学院数学研究所，成了著名数学家熊庆来的研究生。

俗话说：名师出高徒，这一点儿不假。在导师的指导下，他进步更快了，不到3个月，就写出一篇颇有学术价值的论文《亚纯函数及函数组合重值》，发表在《数学学报》上。数学研究所的一些同志看后非常惊讶，纷纷前去询问他的老师。熊庆来高兴地说：“这篇论文我也很满意，这是他学得快，学得深的结果。”

70年代后期，他与同窗好友张广厚合作，在函数值分布领域取得了令国内外数学家们注目的巨大成就。他们最早建立了函数值分布论中两个重要概念——即“亏值”和“波莱耳方向”之间的具体联系；证明了一个有穷正级亚纯函数，其亏值个数大于波莱耳方向个数；对于整函数，其亏值个数不大于波莱耳方向个数的一半。

对于一般的亚纯函数，杨乐首先引进、研究了亏函数，并从建立亏函数的总展布关系入手，首次获得重要成果，导致了国际函数论界在80年代对“奈望林纳猜想”的最终解决。

同时，他对于全纯函数与亚纯函数的正规族理论也有很大贡献。他建立了许多“正规定则”，从而发现了亚纯函数两个基本概

念——正规族与不动点之间的深刻联系。

杨乐还解决了半个世纪以来悬而未决的“李特伍德猜想”。

1978年4月13日，在瑞士苏黎世举行的国际分析数学大会上，许多世界著名数学家会聚在这里，共同探讨着国际分析数学的研究趋向。一天，不满40岁的中国数学家杨乐健步走上讲台开始演讲。在座的数学家们被他的报告惊呆了，他们万万没有想到这位如此年轻的学者，能取得这么惊人的成就。报告结束后，掌声雷动，许多著名数学家前来向他祝贺，紧紧握着他的手说：“这是精彩的论文，惊人的成就。”

82岁高龄的数学家，近代函数值分析论的创始人奈望林纳高兴地说：“刚才你说，你们是来向欧洲数学家学习的，我认为，现在欧洲数学家应该向你们学习了。”

杨乐在函数论研究中，可谓一鸣惊人。

杨乐对数学研究的卓越成就，引起了国际数学界的极大重视，先后应邀到美国、苏联、德国、英国、日本、瑞士、新西兰等国的著名大学讲学，并多次应邀出席国际学术会议。

“五笔字型”的发明者

谁都知道，如何将方块汉字既迅速又准确地输入计算机，是一道世界级的难题，然而值得庆贺的是，中国科学家王永民率先解开了这道难题，并交了一份高水平的答卷……

王永民，1943 年出生在河南南阳县的一个农民家庭里。儿时虽然家境贫寒，但他心怀大志，聪明好学，成绩始终名列前茅。



1968 年，他从中国科技大学毕业后，很快就受到“文化大革命”的冲击，先被送到农场劳动，“累”掉个人名利思想；再被派到四川山沟“重新做人”，接受再教育；后又被遣返回老家南阳。

然而，历史的车轮总是滚滚向前的。王永民始终向往着：“只待阳春三月暮，人间应有花开处！”

1978 年 3 月，全国科学大会后，给他带来了新的转机，他大展宏图的时机到了！他的工作得到了合理的安排。

不过，王永民为了科研不贪图享受，放弃了轻松的机关工作，抱病承担了“汉字编码”的科研任务。他在交通不便、信息不灵、缺乏图书资料的南阳从事“汉字编码的研究”，困难要比在北京、上海等大城市大得多。

然而，王永民凭着扎实的数学功底，丰富的想像力和坚忍不拔的意志，坚持不懈地向这个世界级难题进攻。

为了把汉字输入计算机，首先得吃透汉字。仅这一条，也足以让人倾注毕生心血。

"明知山有虎，偏向虎山行。"王永民的最大特点是敢于向困难挑战，能吃苦耐劳，敢于拼搏。他研究了甲骨文、《说文解字》、《康熙字典》、《新华字典》、《现代汉语词典》，把一万多个汉字逐字拆分，抄成卡片，归类统计分析。

就这样，他把一万多个汉字简化为600个字根，又把600个字根一步步压缩到26个英文键位之中，为此，他花费了多大的精力，付出了多大的心血啊！

1978年至1983年间，王永民用过的卡片可以摞到十几米高。

功夫不负有心人，王永民终于研制成功了"五笔字型"。

五笔字型，是采用五种笔画组成字根的规律和原理，以字根拼形，将汉字进行编码的一种输入法。

1984年9月，王永民应邀到联合国讲学，并实地表演"五笔字型"，赢得了联合国官员的好评。

1986年，王永民发明的"五笔字型"，成为我国首次在美国获得专利权的中文电脑技术，并被世界第二大电脑公司——美国DEC公司所购买。之后，越来越多的外国电脑公司要求购买这一专利。

王永民"五笔字型"的发明，被认为是当今世界几十种汉字输入方案中的最佳方案。接着，联合国官员又向他提出用五笔字型处理繁体汉字的迫切要求。经过4年的努力，"王码繁体汉字电脑系统"又研制成功了，它被认为是世界上独一无二的，可以满足国内外各类用户需要的汉字输入法。

"五笔字型"被人们称为"王码"。它是近年来新闻媒体中使用频率较高的一个词，未来的词书编纂者在这个词条下至少需要

注明以下含义：它是以五笔字型发明人王永民教授姓氏命名的一种汉字电脑输入技术；它指的是王码电脑公司，以及由该公司开发生产的系列中文电脑。

汉字是中华文明的载体，其本身也是华夏文明的有机组成部分。起初，由于它难以与电脑结缘，多少年来中国始终踏不上信息时代的节拍。王永民发明的"五笔字型"，不仅很巧妙地体现了汉字的优点，也使文字输入电脑的效率大大超过了西文。面对每分钟270个汉字输入量的惊人纪录，世界舆论极力称誉它："不亚于活字印刷术"，"挽救了汉字的命运"。同时人们还看到了一个不可否认的事实，即汉字告别了铅与火的午夜，步入了光与电的黎明。

"五笔字型"是中国的一项开创性的重大科研成果，是新中国建国以来高科技推广运用获得成功的典范，充分显示了中国人的聪明才智。

获得菲尔兹奖的华人

菲尔兹奖，是一项著名的世界性数学奖。每4年颁奖一次，每次获奖者不超过4人，每人可得一枚金质奖章。菲尔兹奖专门用于奖励40岁以下的年轻有为的数学家。1936年首次颁奖。

菲尔兹奖是纪念加拿大数学家菲尔兹而设立的，并以他的名字命名。菲尔兹于1924年主持第7届国际数学家大会时，曾设想利用大会节余的经费设立一项基金，用于鼓励青年数学家。1932年他去世前又遗嘱捐赠一部分财产，加上第7届会议大会的节余作为基金，设立一项“不署国名、团体名和个人名的奖金”。1932年第9届国际数学家大会正式决定设立菲尔兹奖。获奖者经由国际数学家联盟执委会选定的8人评委去评选，在国际数学家大会上颁奖。

1982年，美籍华人丘成桐，成为第一个获得此项殊荣的华人数学家。

丘成桐，广东汕头人，移居香港后，就读于香港培正大学。1966年考人香港中文大学数学系。

1969年他提前修完4年课程，他的数学才能就已初露锋芒。美国伯克利加州大学陈省身教授出于爱惜人才，破格录取他为研究生。

1971年，22岁的丘成桐仅用2年时间就完成了研究生课程，以《非正曲率紧流形的基本群》为题的论文，取得博士学位。不久被聘为斯坦福大学和普林斯顿高等学术研究所的终身教授。

1976年，他解决了微分几何的著名难题——卡拉比猜想，并

把微分方程应用到微分几何中去，推动了微分几何和微分方程的发展，成为这个领域最年轻的学者。

“卡拉比猜想”源于代数几何，为意大利数学家卡拉比于1954年提出。这是给定里奇曲率求黎曼度量的问题，其中需要求解一个艰难的偏微分方程，丘成桐成功地解决了这个难题。

丘成桐的成功，促使一大批同类方程得到解决，取得了代数几何学、复解析几何学、微分几何学、甚至广义相对论等领域里的一系列重要成果。

丘成桐曾多次回国讲学，为发展中国的数学事业做了许多工作。

丘成桐的主要贡献是：证明了广义相对论中的正质量猜想。在高维闵科夫斯基问题、赛瓦利猜想、弗兰克尔猜想、三维流形的拓扑学与极小曲面积和史密猜想等方面，均有卓越的成就。

1979年，他被评为加州最优秀科学家。

1981年，获美国数学会奖及美国科学院奖。

1982年，获菲尔兹奖。

1993年，丘成桐被选为美国国家科学院院士。

攻克瓦利隆猜想

我国福建师范大学数学系研究生李松鹰，是世界上最先攻克“瓦利隆猜想”的人。他初生牛犊不畏虎，敢于向世界数学难题挑战，并且取得了令人注目的成就。

李松鹰，1961 年出生，福建省福安县人。中学时代他就是一位品学兼优的学生，聪颖勤奋，学习成绩一直名列前茅。

1978 年，他以优异的成绩考入了福建师范大学数学系。在 4 年大学生活期间，他以攻坚不怕难的大无畏精神，除了学好所开课程外，还涉猎了大量的课外书，打下了坚实的数学基础。

随后，李松鹰考入母校数学系研究生，在谢晖春教授指导下专攻函数论。他发愤苦读，潜心钻研，十分注重思维方式的不断完善和更新。

瓦利隆猜想是世界著名数学难题。它起源于 1928 年法国著名数学家瓦利隆提出的一个猜想。即“有穷正级亚纯函数与其导函数是否存在公共的方向?”这是亚纯函数研究领域中一个十分重大的问题。

半个多世纪以来，国外数学家前赴后继，为瓦利隆猜想付出了极大的努力，然而，仅仅得到一些带有附加条件的结果，进展甚微。世界数学难题的难度可窥见一斑。

李松鹰在导师谢晖春的悉心指导和全力帮助下，坚忍不拔地探索着。他思路敏捷、敢于独辟蹊径，研究工作进展迅速，很快在亚纯函数模分布与辐角分布方向上获得了一系列重大成果。1984 年，他成功地证明了英国数学家海曼于 50 年代提出的有关亚纯函

数正族的2个猜想，以及我国著名数学家杨乐于1982年提出的关于亚纯函数奇异方向的3个猜测。

李松鹰由于勤奋努力，硕果接连不断。

1985年，他对瓦利隆猜想经过刻苦的钻研、论证，终于取得了突破性进展，攻克了存疑半个多世纪的数学堡垒，使瓦利隆猜想得到证明。

李松鹰的论文摘要及全文发表在我国数学界权威刊物《数学进展》和《中国科学》上。

年仅24岁的李松鹰成功地解决了半个多世纪以来许多数学家未能解决的疑难问题，国际数学界大为震动。专家们惊叹，真乃年轻有为，后生可畏啊！

李松鹰关于单复变函数的论文，数学界也曾给予高度的评价。

获得戴维逊奖的侯振挺

1978年中的一天，中国科学院收到英国洛勒·戴维逊基金会的来信。从信中得知：中国长沙铁道学院数学教授侯振挺，由于解决了数学家们40年一直探索的过程惟一性准则，决定授予他本年度的戴维逊奖。

侯振挺在世界上获得如此殊荣，他首先想到的是他中学时代的数学老师——张金山，是张老师启发他对数学产生了浓厚的兴趣，最后走上了研究数学的道路，登上了科学高峰。

那是令他难忘的1949年到1952年间，侯振挺在河南密县中学读书。张金山老师的数学水平很高，加上授课艺术好，能把抽象的数学知识讲得非常生动、有趣味，使学生听得津津有味，简直入了迷。从那时起，侯振挺对数学产生了浓厚的兴趣，立志在数学这块园地里做出一番事业。

1955年，他考入唐山铁道学院。20岁时他开始研究数学上的"巴尔姆断言"，21岁时就发表了第一篇数学论文《排队中巴尔姆断言的证明》。从此，他研究数学的兴趣一发而不可收。1974年，他在《中国科学》上发表了一篇著名的论文《Q过程惟一准则》，引起了国内外概率论专家们的广泛注意和赞扬。国际数学界把侯振挺的关于Q过程惟一定理，称为"侯氏定理"。饮水思源是人类的一种美德。侯振挺非常感谢辛勤而又默默无闻的张金山老师。获戴维逊奖后，他专程去看望张老师，感谢老师的教育之恩，同时把英国洛勒·戴维逊基金会关于授予他戴维逊奖的文件影印件，送给张金山老师。

随后，他又与张金山老师的另一位学生——成名学者郭青峰合著了《齐次可列马尔可夫过程》一书。

获得英国戴维逊奖，并不是一件容易事情。侯振挺曾说："在天才与勤奋之间，我选择勤奋。"他常常整天整夜埋头工作。有几次已经躺在床上，一想到新的解法，立即起床写下来。有一次，他一边煮饭，一边思索数学问题，饭焦了也不觉得。他在诗内写道：

十年不辨饭香甜，马氏过程伴我眠。

透过侯振挺向科学高峰攀登的只鳞片爪，可以看到他那坚忍不拔的拼搏精神；看到他那废寝忘食、埋头攻关的身影；看到中华民族的未来和希望；看到老师在教学中的主导作用，是老师在影响着一个学生的志向和未来。

戴维逊奖的颁发是对侯振挺做的充分肯定，既肯定了他的科学成就，又鼓励和倡导了他那种拼搏的精神。

享誉国际的数学家樊𪸩

享誉国际的数学家樊𪸩，是美籍华人。他的研究范围涉及组合拓扑、拓扑群、不定度规空间、复分析等领域，可称得上是一位多才多艺多产的著名数学家。

樊𪸩1914年出生，少年时代在杭州西子湖畔度过。他的姑父冯祖荀先生是著名数学前辈。受其姑父的影响，他一头扑进了数学世界的大门。

1932年秋，他考入北京大学数学系。大学二年级时，他译出斯彼涅儿的《解析几何与代数》，这部著作作为《大学数学丛书》之一，于1935年由商务印书馆出版。

1936年大学毕业后，留校任教。1939年春天，法国“庚子赔款”公费生招考，樊𪸩和钱三强分别取得数学、物理惟一的名额。当年夏天赴巴黎。

在巴黎，他一面补习法文，一面攻读博士学位。仅用两年的时间，就以《关于一般分析的若干基本概念》的论文通过答辩，获得法国国家科学研究中心的研究职位，并在著名的彭加勒研究所从事研究。到1945年第二次世界大战结束时，他已发表论文20余篇。在异常艰难的条件下，取得这样的成果，真是难能可贵。

随后，他又转到美国，先后在普林斯顿高等研究所、圣母大学、韦恩大学、西北大学、加州大学圣他巴巴拉分校工作过。

樊𪸩的学术成就是多方面的。他在非线性分析、凸分析、数理经济学、对策论、算子理论、不等式、矩阵论等方面的贡献，已成为许多当代数学论著赖以展开的基本定理和出发点。

他最重要的数学贡献，是非线性分析方面。他建立了一系列的有限维和无限空间上的不动点定理和鞍点定理，使非线性分析的理论得以大幅度地改进和充实。他的不动点定理，保持着这一领域中的领先地位。

1972年，他发表了《一个极大极小不等式及其应用》的论文，使得非线性分析的面貌发生了重要变化。这个樊𰋀极大极小不等式在处理对策论和数理经济学的基本定理时，明显地是有效而通用的工具。一系列非线性问题的著作，都将樊𰋀不等式放在中心位置构成整个理论的出发点。

樊𰋀曾为海峡两岸的数学发展做出许多贡献。1989年他回到阔别多年的故土探亲访友和举行学术活动，将全部藏书和杂志30余箱送交母校北京大学。1993年，他还回杭州参加了纪念陈建功100周年诞辰学术会议。

以樊𰋀名字命名的数学定理不胜枚举。例如线性规划理论中的樊𰋀条件，凸函数理论中樊𰋀基本定理，都具有基本的重要性。至于线性代数中，有樊𰋀控制定理、樊𰋀乘积等等。

1985年，在他退休之际，美国数学界为他举行了盛大的学术活动，加州大学圣他巴巴拉分校宣布设立樊𰋀助理教授职位，以便持久地表彰他的功绩。

1990年5月22日，法国巴黎多芬大学授予他荣誉博士学位。

人们确认，樊𰋀看似平淡实则深刻的成果，将在未来世纪继续发挥重大的作用。

中国的高性能计算机

当今，计算机已经在社会的各个领域中得到应用，就是在寻常百姓人家，它的普及率也越来越高了。令人高兴的是，我国在高性能计算机研究领域里，已跨入了世界先进行列。从“银河—Ⅰ”、“银河—Ⅱ”、“银河—Ⅲ”直到“神威Ⅰ”高性能计算机的研制成功，充分显示了我国科技人员已掌握巨型计算机的研制技术，使我国成为继美、日之后，第三个能够研制高性能计算机的国家。

巨型计算机技术在我国的发展很迅速。

1983年11月，我国研制成功了千万次的电子计算机。紧接着，在其后短短的一个月中，又催生了亿次“银河—Ⅰ”巨型计算机。

1992年11月19日，我国又研制了“银河—Ⅱ”10亿次巨型计算机。不到5年，“银河—Ⅲ”100亿次巨型计算机问世了。

喜报接踵而来，1999年9月，我国“神威Ⅰ”3840亿次浮点结果的高性能计算机又诞生了。

那么，这几种巨型计算机都各有何特点呢？

目前，世界上的巨型计算机技术朝着两个方向发展：一是多个处理器共用一个“仓库”——存储器，另一个是多个处理器各有自己的“仓库”。

我国的“银河—Ⅰ”和“银河—Ⅱ”巨型计算机采用的是多个处理器共用一个“仓库”的结构，因通信、散热等问题不能突破10亿次。

所以，“银河—Ⅲ”采用多个处理器各用自己的“仓库”的线路

结构，而且各“仓库”间还必须能有机地联系起来。上百个处理器间相互联系彼此的“仓库”，通信量非常大，这就需要“高速路”。

为了实现“银河—Ⅲ”机内高速度通信，它的内部线路采用了三维立体结构。各器件之间用了近1万根电线相互绕接，绕点竟有4万多个！

而且“银河—Ⅲ”的4种专用芯片是一次投片生产成功的，在当时创造了巨型计算机制造史上的奇迹。因为这4种芯片的集成度在6万—10万门，相当于在一张邮票大小的地方安装6万—10万个小“电子开关”。在国际上，这种芯片的一次投片生产成功率仅为60%。

“神威Ⅰ”由主机系统、前端系统、磁盘阵列系统和软件系统组成。它配备了大容量主存和磁盘阵列，与工业标准兼容的分布式并列操作系统，多种并行程序开发及支持环境，科学计算软件库，数据库和可视化系统等，主要技术指标和性能都达到了国际先进水平。

“神威Ⅰ”巨型计算机高1.90米，它的最高运算速度是每秒3840亿次浮点结果，这就相当于有3840亿人同时在1秒内正确运算一道加法题的运算量。

“神威Ⅰ”高性能计算机有什么功能呢？

“神威Ⅰ”首先在我国的气象预报中初露锋芒。

80年代初，我国的天气预报只能预报2—3天，现在借助“神威Ⅰ”，我国气象局能在8小时内完成32个样本、10天全球预报，极大地提高了中期数值预报的精度和预测计算能力。

1999年国庆50周年时，在天安门广场举行了盛大的庆祝活动。正是“神威Ⅰ”准确地预报了10月1日早上3时雨停，8时以后出太阳，使庆祝活动得以顺利、准时地举行。

在石油勘探领域，“神威Ⅰ”显著降低了勘探风险。中石化总公司石油物探研究院开发的地震成像并行处理系统，在100平方

千米范围内24次覆盖、240万道三维地震数据计算中，如果使用亿次巨型计算机需要10年，而使用“神威Ⅰ”仅需8小时。石油工业分析油藏流动所保存的13年的开采数据，使用“神威Ⅰ”来计算，只须4小时37分就可以完成。

中科院生物物理所开发的人类基因克隆系统，运用“神威Ⅰ”完成了人类心脏基因克隆的运算，达到了国际先进水平。

据了解，在“神威Ⅰ”运行短短10个月中，已完成了28项科研课题，涉及航空航天、药物生化、石油勘探和开发、人类基因克隆等领域，取得了丰硕的应用成果，在国民经济建设中发挥着积极的作用。

2000年7月26日，我国的“神威Ⅰ”首次在北京亮相，它将在中国气象局北京市高性能计算机应用中心对外免费使用2年。

“神威Ⅰ”高性能计算机是中国最快的计算机，它的反应速度在世界前500台投入商业运营的巨型计算机中，排名第48位。中国是继美、日之后，第三个具备研制高性能计算机能力的国家。

让计算机更聪明的人

在现代数学历史上，有不少轰动数坛，闪耀智慧光华的中国人。数学界不会忘记，“三个中国人的算法”、“相似性原理”、“例证法”等一系列研究成果，曾一次次引起国际数坛上的轰动。而做出这些令人仰慕成果的，就是世界著名数学家、计算机专家洪加威。

洪加威在中学时代，在数学上已展露才华。

当时，《数学通报》上时常刊登一些数学难题征解，洪加威非常喜欢动脑去解几道难题，出于对数学的挚爱，他不断自觉地学习，渐渐地他能把《数学通报》上面的问题的一般性定理独立做出来。

上了高中，洪加威对数学更加迷恋，数学境界里的诗情画意更使他流连忘返。他时常将自己的研究心得写成一篇篇“学术论文”，并被当作学生习作在杂志上发表。

洪加威不仅数学成绩突出，而且其他兴趣也十分广泛。下棋、作曲、演戏、拉琴、书画、航模等无所不能，各门功课的成绩都非常出色。难怪他的老师对他格外器重：“好好学习，将来你一定会成为科学家的。”

是啊，洪加威对此虽然没有表露，但自己也对此充满了信心。

转眼到了1955年，洪加威以优异成绩考入北京大学数学系，在这里他打下了坚实的数学基础。几经周折，1962年又考上了北京大学数学系的研究生。

之后，洪加威的数学研究似乎并没有人们想像的那样顺利。

命运之神在不断"捉弄他"。

是啊，他的成才之路历尽坎坷(kǎn · kě)。长期专业不对口，多年下放劳动，各行各业他几乎都干过。当过调查员、赤脚医生、公社农业技术员、美工……

然而，虽处逆境，洪加威却并没有怨天尤人，没有沉沦，而是面对现实，一边干好本职工作，一边钻研他心爱的数学，在数学的王国中追求着他的梦想，抱着为科学献身的信念，始终没有动摇过。

洪加威不愧是洪加威，他的最大优点，也就是他的过人之处，在于他有抓学科突破点的敏锐洞察力和解决问题时的巨大创造力。正是他的这一优势，使他的数学研究工作硕果累累。

1965 年，洪加威完成了一篇数学论文《关于 $P(kP+1)(kP+2)$阶的单群》，它已达到国外一篇很好的博士论文水平。13 年后，这篇论文被评为全国科学大会重大贡献成果奖。

1974 年，洪加威终于结束了长达 5 年之久的"下放干部"生活，踏进了刚成立不久的"北京市计算中心"。

20 世纪 70 年代初期，我国开始生产一种加工精度很高的数控机床。当时，有人这样形容过数控机床："我国线切割机床的切割速度是世界第一流的，但手工编程却是老牛拉破车！"

是的，靠手工编制加工程序非常麻烦，有时要编出一套模具程序需五六十人"会战"三四个月，但在机床上一加工，零件报废，原因是出现计算错误。

为了解决我国模具生产的"老大难"，只有请计算机"上马"了。

当时，美国已有一套大型数控语言——APT 语言，但在国内使用有许多障碍。

洪加威认真分析了"APT 语言"的程序，认为应当根据面临的实际情况，搞一个新的语言系统。

于是，他根据自己的初步设想拟订了一个方案，结果有人认为

开发一个语言系统难度太大了，方案一提出就被“枪毙”了。

少年时期就形成强烈创新意识的洪加威，并没有退却。“不，要搞就应创新，要自己设计出中国式的语言系统。”他只好单枪匹马，啃下这块“硬骨头”。

1976年深秋，洪加威在一个简陋的地震棚里，干起了大事业，拉开了设计计算机语言的帷(wéi)幕。

洪加威一头扎进资料堆里，查材料，找数据，经过处心积虑一番探索，终于想出一个两全其美的方法。

当时，国产计算机上使用一种科学计算语言——BCY系统，他恰到好处地为BCY系统做了一个“大手术”。

人们曾这样形容过，如果把计算机比作一个花盆，把BCY语言系统当作花盆中生长的仙人掌，线切割语言就好比是嫁接在仙人掌上的蟹爪兰，由于它可以从母体吸收营养，所以生长迅速，花朵艳丽，而且，花兼两者的“性状”。无疑这是一套最精练、最有效的语言。这里体现了洪加威那精湛(zhàn)的数学造诣(yì)和良好的美学修养。

仅用一个月，手编程序就完成了。下一步，就要在计算机上进行调试，并逐项检查。像他这样的“单干户”，只能利用别人停机的空隙，打出一卷卷他所需要的数据，再根据这些数据来分析调试手编程序所要解决的一切问题。

就这样，洪加威忙里偷闲，用了3个月的时间，开发出了一种高效的国产线切割语言。洪加威给它起了一个响当当的名字——XY语言。

通过工厂工人的使用反映：这种语言降低了线切割编程人员文化水平要求，清除了计算机的神秘感。一个具备初中文化程度的人，学上3天，就可操纵。

洪加威他们的科研成果，经过9年多的开发推广工作，已成为我国模具行业的关键技术，创造了巨大的物质财富，有着深远的社

会意义。

1978 年初，美籍华人著名科学家王浩教授来华访问，经丁石孙介绍，王浩了解了洪加威的工作能力，回国后他把这些情况及洪加威早年在《中国科学》上发表的 2 篇论文介绍给国际计算机理论界的权威——多伦多大学的柯克教授。

第二年 10 月，洪加威受柯克教授之邀，以客座教授的身份去多伦多大学研究和讲学。这次旅加之行，他以机智幽默的性格和突出的工作，赢得了科技界的好评。

在第 12 届计算理论会议上，洪加威以“三个中国人的故事”深入浅出地介绍了他出访后的第一篇论文——《关于决定性空间完全性问题》。

报告一结束，几十位著名科学家前来祝贺：

“这真是三天与会期间最好的报告。”

“听你的报告真是一种享受。”

不认识他的人都在问：“这个报告人是谁？你认识这个人吗？太好了！”

1980 年 10 月 15 日，洪加威在国际第 21 届计算机科学基础会议上，宣读了《计算的相似性与对偶性原理》的开创性学术报告。他把现代计算机科学的基础——图灵论，从本质上向前推进了一步。

在数学上，人们要否定一个几何定理，只要找一个反例就够了。然而，要证明一个几何定理，决不可能只靠一些具体的例子。就此，洪加威一改传统做法，提出了别具一格的“例证法”，改变了人们的传统观念。这样，人们只要找出一个具体的例子和一个误差范围，再用计算机检查一下，如果这个例子在误差范围内正确，这个几何定理就被证明。否则，定理就不成立。这是对初等数学的一大贡献。

一位早期数学家说得好：“不是心灵中的诗人，就不可能成为

数学家。”是的，洪加威就是一个心灵中的诗人，他笔下的一行行符号、公式、公理，不就是一篇篇美妙的诗篇吗？这是一首首颂扬科学、讴歌真理、以 x、y 为音符奏响的数学乐诗！

“千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金”，洪加威凭着对数学的热爱，锲而不舍的追求，达到了理想的彼岸，取得了丰硕成果，得到了世人的赞誉。

1980 年一位美籍华人软件专家回国时看到 XY 语言及其应用时高兴地说：“想不到，祖国在这方面有这么高的水平。”美国耶鲁大学计算机科学系一位教授 1984 年回国看到 XY 语言时说：“今天把这种语言开发到美国去都是很受欢迎的。”

1980 年 10 月 15 日，他在美国纽约州西诺求斯市第 21 届计算机科学基础会议上作的关于《计算的相似性与对偶性原理》学术报告，得到了很高的评价：

“真是太漂亮了，一个惊人的报告！”著名学者鲍罗廷感慨地说。

“你的报告不仅在成果上是杰出的，在报告艺术上也是超群的。”第 21 届计算机科学基础会议主席罗森伯祝贺他说。

“听你杰出的报告是一种巨大的享受，你的研究是计算机复杂性理论中迄今所得的最杰出的成就。”加州大学卡尔普教授在给洪加威的信中这样写道。

数学家。"是的，洪加威就是一个心灵中的诗人，他笔下的一行行符号、公式、公理，不就是一篇篇美妙的诗篇吗？这是一首首颂扬科学、讴歌真理、以 x、y 为音符奏响的数学乐诗！

"千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金"，洪加威凭着对数学的热爱，锲而不舍的追求，达到了理想的彼岸，取得了丰硕成果，得到了世人的赞誉。

1980 年一位美籍华人软件专家回国时看到 XY 语言及其应用时高兴地说："想不到，祖国在这方面有这么高的水平。"美国耶鲁大学计算机科学系一位教授 1984 年回国看到 XY 语言时说："今天把这种语言开发到美国去都是很受欢迎的。"

1980 年 10 月 15 日，他在美国纽约州西诺求斯市第21 届计算机科学基础会议上作的关于《计算的相似性与对偶性原理》学术报告，得到了很高的评价：

"真是太漂亮了，一个惊人的报告！"著名学者鲍罗廷感慨地说。

"你的报告不仅在成果上是杰出的，在报告艺术上也是超群的。"第 21 届计算机科学基础会议主席罗森伯祝贺他说。

"听你杰出的报告是一种巨大的享受，你的研究是计算机复杂性理论中迄今所得的最杰出的成就。"加州大学卡尔普教授在给洪加威的信中这样写道。

数学家。"是的，洪加威就是一个心灵中的诗人，他笔下的一行行符号、公式、公理，不就是一篇篇美妙的诗篇吗？这是一首首颂扬科学、讴歌真理、以 x、y 为音符奏响的数学乐诗！

"千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金"，洪加威凭着对数学的热爱，锲而不舍的追求，达到了理想的彼岸，取得了丰硕成果，得到了世人的赞誉。

1980 年一位美籍华人软件专家回国时看到 XY 语言及其应用时高兴地说："想不到，祖国在这方面有这么高的水平。"美国耶鲁大学计算机科学系一位教授 1984 年回国看到 XY 语言时说："今天把这种语言开发到美国去都是很受欢迎的。"

1980 年 10 月 15 日，他在美国纽约州西诺求斯市第 21 届计算机科学基础会议上作的关于《计算的相似性与对偶性原理》学术报告，得到了很高的评价：

"真是太漂亮了，一个惊人的报告！"著名学者鲍罗廷感慨地说。

"你的报告不仅在成果上是杰出的，在报告艺术上也是超群的。"第 21 届计算机科学基础会议主席罗森伯祝贺他说。

"听你杰出的报告是一种巨大的享受，你的研究是计算机复杂性理论中迄今所得的最杰出的成就。"加州大学卡尔普教授在给洪加威的信中这样写道。

数学家。”是的，洪加威就是一个心灵中的诗人，他笔下的一行行符号、公式、公理，不就是一篇篇美妙的诗篇吗？这是一首首颂扬科学、讴歌真理、以 x、y 为音符奏响的数学乐诗！

“千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金”，洪加威凭着对数学的热爱，锲而不舍的追求，达到了理想的彼岸，取得了丰硕成果，得到了世人的赞誉。

1980 年一位美籍华人软件专家回国时看到 XY 语言及其应用时高兴地说：“想不到，祖国在这方面有这么高的水平。”美国耶鲁大学计算机科学系一位教授 1984 年回国看到 XY 语言时说：“今天把这种语言开发到美国去都是很受欢迎的。”

1980 年 10 月 15 日，他在美国纽约州西诺求斯市第21 届计算机科学基础会议上作的关于《计算的相似性与对偶性原理》学术报告，得到了很高的评价：

“真是太漂亮了，一个惊人的报告！”著名学者鲍罗廷感慨地说。

“你的报告不仅在成果上是杰出的，在报告艺术上也是超群的。”第 21 届计算机科学基础会议主席罗森伯祝贺他说。

“听你杰出的报告是一种巨大的享受，你的研究是计算机复杂性理论中迄今所得的最杰出的成就。”加州大学卡尔普教授在给洪加威的信中这样写道。